Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 517.929

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

М.С. Белокурский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF THE ALMOST PERIODIC ABEL EQUATION WITH LINEAR REFLECTING FUNCTION

M.S. Belokursky

F. Scorina Gomel State University

Получены достаточные условия существования почти периодических решений почти периодических уравнений Абеля и Риккати.

Ключевые слова: *уравнение Абеля*, *линейная отражающая функция*, *почти периодическое решение*, *уравнение Риккати*.

The sufficient conditions under which almost periodic Abel and Riccati equations have almost periodic solutions were obtained.

Keywords: *Abel equation*, *linear reflecting function*, *almost periodic solution*, *Riccati equation*.

Введение

Отражающая функция [1, с. 62] определяется через общее решение дифференциального уравнения. Несмотря на то, что решить подавляющее большинство дифференциальных уравнений невозможно, разработаны методы, позволяющие находить отражающую функцию даже у неинтегрируемых в квадратурах уравнений. Метод отражающей функции является мощным инструментом, с помощью которого можно проводить качественное исследование дифференциальных уравнений. В частности, отражающая функция позволяет судить о наличии и устойчивости периодических решений периодических систем, решать проблему центра-фокуса.

Различные дифференциальные системы могут иметь одну и ту же отражающую функцию, и при этом их решения обладают рядом одинаковых свойств (периодичность, устойчивость и др.) Поэтому можно говорить об эквивалентности в смысле совпадения отражающих функций. Таким образом, можно исследовать не исходное уравнение, а эквивалентное ему и более удобное для изучения. В связи с этим возникает актуальная задача построения классов эквивалентности [1, с. 74] дифференциальных уравнений для конкретных отражающих функций. Особый интерес представляют те случаи, когда можно найти условия эквивалентности почти периодических дифференциальных уравнений периодическим, а также выяснить наличие почти периодических решений у таких уравнений [2]–[4].

В данной работе рассматриваются вопросы построения класса эквивалентности уравнений Абеля и, как следствие, уравнений Риккати, соответствующего линейной отражающей функции. Также рассматриваются случаи наличия почти периодических решений у почти периодических уравнений Абеля и Риккати.

1 Структура решения дифференциального уравнения с линейной отражающей функцией

Как известно [5, с. 43] линейная отражающая функция скалярного дифференциального уравнения первого порядка $\dot{x} = X(t,x)$ имеет вид

$$F(t,x) = \alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x, \qquad (1.1)$$

где $\alpha(t), \beta(t)$ – нечетные непрерывно дифференцируемые функции. Тогда все уравнения с отражающей функцией (1.1) задаются формулой

$$\begin{gathered}\dot{x} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\alpha}(t)e^{-\beta(t)} + \alpha(t)\dot{\beta}(t)e^{-\beta(t)} + 2\dot{\beta}(t)x\right) + \\ + e^{-2\beta(t)}R(t,x) - R(-t, \alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x),\end{gathered} \qquad (1.2)$$

где $R(t,x)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Для любого решения $x(t)$ дифференциального уравнения (1.2) справедливо тождество

$$F(t, x(t)) \overset{t}{\equiv} x(-t). \qquad (1.3)$$

***Лемма* 1.1.** *Если функция* (1.1) *является отражающей функцией дифференциального уравнения* (1.2), *то всякое его решение имеет вид*

$$x(t) = e^{-\beta(t)}\left(f(t) - \frac{1}{2}\alpha(t)\right), \qquad (1.4)$$

где $f(t)$ – четная и для всякого решения $x(t)$ своя функция, *удовлетворяющая уравнению*

$$\begin{gathered}\dot{f} = e^{-\beta(t)}R\left(t, e^{-\beta(t)}\left(f - \frac{1}{2}\alpha(t)\right)\right) - \\ - e^{\beta(t)}R\left(-t, e^{\beta(t)}\left(f + \frac{1}{2}\alpha(t)\right)\right).\end{gathered} \qquad (1.5)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Тождество (1.3) для отражающей функции (1.1) имеет вид $\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x(t) \equiv x(-t)$.

Преобразуем полученное равенство:

$$e^{\beta(t)}x(t) + \frac{1}{2}\alpha(t) \equiv e^{\beta(-t)}x(-t) + \frac{1}{2}\alpha(-t).$$

Отсюда $e^{\beta(t)}x(t) + \frac{1}{2}\alpha(t) = f(t)$, где $f(t)$ – некоторая четная функция, причем у различных уравнений (1.2) это будут различные функции $f(t)$. Выражая $x(t)$, имеем решение вида (1.4).

Построим уравнение, из которого можно найти функцию $f(t)$. Для этого подставим (1.4) в (1.2):

$$-\dot{\beta}e^{-\beta}\left(f - \frac{1}{2}\alpha\right) + e^{-\beta}\left(\dot{f} - \frac{1}{2}\dot{\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\dot{\alpha}e^{-\beta} + \alpha\dot{\beta}e^{-\beta} + 2\dot{\beta}e^{-\beta}\left(f - \frac{1}{2}\alpha\right)\right) +$$

$$+e^{-2\beta}R\left(t, e^{-\beta}\left(f - \frac{1}{2}\alpha\right)\right) - R\left(-t, e^{\beta}\left(f + \frac{1}{2}\alpha\right)\right).$$

После упрощений имеем уравнение (1.5). □

Отметим что, если найдено общее решение уравнения (1.5), то решение (1.4) будет общим решением уравнения (1.2).

2 Уравнения Абеля и Риккати с линейной отражающей функцией

Рассмотрим уравнение Абеля

$$\dot{x} = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x + D(t). \qquad (2.1)$$

В [7] был указан один из случаев, когда уравнение Абеля имеет линейную отражающую функцию. Построим класс эквивалентности всех уравнений вида (2.1) соответствующий отражающей функции (1.1). Для этого будем опираться на основное соотношение

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) \equiv 0, \;\; F(0,x) \equiv x. \quad (2.2)$$

Из [1, c. 63] известно, что функция $F(t,x)$ будет отражающей функцией уравнения первого порядка с правой частью $X(t,x)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному тождеству (2.2).

Теорема 2.1. *Функция* (1.1) *является отражающей функцией уравнения Абеля* (2.1) *тогда и только тогда, когда это уравнение имеет вид*

$$\dot{x} = a(t)e^{2\beta(t)}x^3 + e^{\beta(t)}\left(b(t) + \frac{3}{2}\alpha(t)a(t)\right)x^2 +$$

$$+\left(c(t) + \alpha(t)b(t) - \dot{\beta}(t)\right)x + \qquad (2.3)$$

$$+e^{-\beta(t)}\left(d(t) + \frac{1}{2}\alpha(t)c(t) - \frac{1}{4}\alpha^3(t)a(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}\right),$$

где $a(t), b(t), c(t), d(t)$ *– произвольные непрерывные нечетные функции.*

Доказательство. Составим основное соотношение (2.2) для отражающей функции (1.1) уравнения Абеля (2.1):

$$\dot{\alpha}(t)e^{\beta(t)} + \alpha(t)\dot{\beta}(t)e^{\beta(t)} + 2\dot{\beta}(t)e^{2\beta(t)}x +$$

$$+e^{2\beta(t)}\left(A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x + D(t)\right) +$$

$$+A(-t)\left(\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x\right)^3 +$$

$$+B(-t)\left(\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x\right)^2 +$$

$$+C(-t)\left(\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x\right) + D(-t) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены по степеням x, получим

$$\left(A(t)e^{2\beta(t)} + A(-t)e^{6\beta(t)}\right)x^3 +$$

$$+\left(B(t)e^{2\beta(t)} + 3A(-t)\alpha(t)e^{5\beta(t)} + B(-t)e^{4\beta(t)}\right)x^2 +$$

$$+\left(2\dot{\beta}(t)e^{2\beta(t)} + C(t)e^{2\beta(t)} + 3A(-t)\alpha^2(t)e^{4\beta(t)} +\right.$$

$$\left.+2B(-t)\alpha(t)e^{3\beta(t)} + C(-t)e^{2\beta(t)}\right)x +$$

$$+\dot{\alpha}(t)e^{\beta(t)} + \alpha(t)\dot{\beta}(t)e^{\beta(t)} + D(t)e^{2\beta(t)} +$$

$$+A(-t)\alpha^3(t)e^{3\beta(t)} + B(-t)\alpha^2(t)e^{2\beta(t)} +$$

$$+C(-t)\alpha(t)e^{\beta(t)} + D(-t) = 0.$$

В силу линейной независимости степеней x получаем систему уравнений:

$$A(t)e^{2\beta(t)} + A(-t)e^{6\beta(t)} = 0,$$

$$B(t)e^{2\beta(t)} + 3A(-t)\alpha(t)e^{5\beta(t)} + B(-t)e^{4\beta(t)} = 0,$$

$$2\dot{\beta}(t)e^{2\beta(t)} + C(t)e^{2\beta(t)} + 3A(-t)\alpha^2(t)e^{4\beta(t)} +$$

$$+2B(-t)\alpha(t)e^{3\beta(t)} + C(-t)e^{2\beta(t)}, \qquad (2.4)$$

$$\dot{\alpha}(t)e^{\beta(t)} + \alpha(t)\dot{\beta}(t)e^{\beta(t)} + D(t)e^{2\beta(t)} +$$

$$+A(-t)\alpha^3(t)e^{3\beta(t)} + B(-t)\alpha^2(t)e^{2\beta(t)} +$$

$$+C(-t)\alpha(t)e^{\beta(t)} + D(-t) = 0.$$

Умножив первое уравнение системы (2.4) на $e^{-4\beta(t)}$, перепишем его в виде

$$A(-t)e^{2\beta(t)} = -A(t)e^{-2\beta(t)}.$$

Следовательно, $A(t)e^{-2\beta(t)} = a(t)$, где $a(t)$ – произвольная нечетная функция. Итак, $A(t) = a(t)e^{2\beta(t)}$.

Подставляем найденный коэффициент $A(t)$ во второе уравнение системы (2.4). Умножаем полученное после этого уравнение на $e^{-3\beta(t)}$ и преобразовываем к виду

$$B(-t)e^{\beta(t)} - \frac{3}{2}\alpha(t)a(t) = -\left(B(t)e^{-\beta(t)} - \frac{3}{2}\alpha(t)a(t)\right).$$

Отсюда $B(t)e^{-\beta(t)} - \frac{3}{2}\alpha(t)a(t) = b(t)$, где $b(t)$ – произвольная нечетная функция. Следовательно,

$$B(t) = e^{\beta(t)}\left(b(t) + \frac{3}{2}\alpha(t)a(t)\right).$$

Далее, подставляя найденные коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ в третье уравнение системы (2.4) и применяя аналогичные рассуждения, находим коэффициент $C(t) = c(t) + \alpha(t)b(t) - \dot{\beta}(t)$, где $c(t)$ – произвольная нечетная функция. И, наконец, из последнего уравнения системы (2.4) получаем коэффициент

$$D(t)=e^{-\beta(t)}\left(d(t)+\frac{1}{2}\alpha(t)c(t)-\frac{1}{4}\alpha^3(t)a(t)-\frac{1}{2}\dot{\alpha}(t)\right).$$

Подставляя все найденные выше коэффициенты в уравнение (2.1), получаем уравнение (2.3). Ввиду необходимости и достаточности основного соотношения (2.2) для отражающей функции уравнения (2.1) теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Функция* (1.1) *является отражающей функцией уравнения Риккати*

$$\dot{x}=B(t)x^2+C(t)x+D(t)$$

тогда и только тогда, когда это уравнение имеет вид

$$\dot{x}=b(t)e^{\beta(t)}x^2+\left(c(t)+\alpha(t)b(t)-\dot{\beta}(t)\right)x+ +e^{-\beta(t)}\left(d(t)+\frac{1}{2}\alpha(t)c(t)-\frac{1}{2}\dot{\alpha}\right), \tag{2.5}$$

где $b(t), c(t), d(t)$ *– произвольные непрерывные нечетные функции.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2.1, если положить функцию $a(t)\equiv 0$.

3 Почти периодические решения почти периодических уравнений Абеля и Риккати

Как следует из леммы 1.1 решения уравнения (2.3) задаются формулой (1.4) с некоторой неизвестной четной функцией $f(t)$. Построим для уравнения (2.3) соответствующее уравнение для функции $f(t)$.

***Лемма* 3.1.** *Для того чтобы функция* (1.4) *была решением уравнения* (2.3) *необходимо, чтобы функция* $f(t)$ *была решением уравнения*

$$\dot{f}=a(t)f^3+b(t)f^2+\left(c(t)+\frac{3}{4}\alpha^2(t)a(t)\right)f+ +d(t)-\frac{1}{4}\alpha^2(t)b(t). \tag{3.1}$$

Доказательство леммы состоит в непосредственной подстановке функции (1.4) в уравнение (2.3).

Если в уравнении (3.1) положить $a(t)\equiv 0$, то оказывается справедливым

***Следствие* 3.1.** *Для того чтобы функция* (1.4) *была решением уравнения* (2.5) *необходимо, чтобы функция* $f(t)$ *была решением уравнения*

$$\dot{f}=b(t)f^2+c(t)f+d(t)-\frac{1}{4}\alpha^2(t)b(t). \tag{3.2}$$

***Теорема* 3.1.** *Пусть функции* $a(t), b(t), c(t), d(t), \alpha(t)$ *являются* 2ω*-периодическими, а функция* $\beta(t)$ *– почти периодическая или* 2Ω*-периодическая с иррациональным отношением* ω/Ω. *Если* $f(t)$ *является продолжимым на отрезок* $[-\omega;\omega]$ *решением уравнения* (3.1), *то функция* (1.4) *будет почти периодическим или квазипериодическим решением уравнения* (2.3).

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда правая часть уравнения (3.1) является 2ω-периодической и нечетной по t. Согласно [1, с. 65] все продолжимые на отрезок $[-\omega;\omega]$ решения уравнения (3.1) будут 2ω-периодическими и, значит, $f(t)$ тоже 2ω-периодическая функция.

Учитывая почти периодичность функции $\beta(t)$ или ее периодичность с несоизмеримым периодом по отношению к периоду коэффициентов уравнения (3.1), убеждаемся в том, что (1.4) является почти периодическим или квазипериодическим решением уравнения (2.3). □

***Теорема* 3.2.** *Пусть функции* $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $\alpha(t)$ *являются* 2ω*-периодическими, а функция* $\beta(t)$ *– почти периодическая или* 2Ω*-периодическая с иррациональным отношением* ω/Ω. *Если* $f(t)$ *является продолжимым на отрезок* $[-\omega;\omega]$ *решением уравнения* (3.2), *то функция* (1.4) *будет почти периодическим или квазипериодическим решением уравнения* (2.5).

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 3.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: монография / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.
2. *Деменчук, А.К.* Об одном классе почти периодических решений обыкновенных дифференциальных систем / А.К. Деменчук // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 6. – С. 28–30.
3. *Белокурский, М.С.* Периодическая отражающая функция нелинейной квазипериодической дифференциальной системы с двухчастотным базисом / М.С. Белокурский, А.К. Деменчук // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 10. – С. 1356–1360.
4. *Белокурский, М.С.* Периодические отражающие функции линейных дифференциальных систем с несоизмеримыми периодами однородной и неоднородной частей / М.С. Белокурский // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 12–17.
5. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: Университетское, 1986. – 76 с.
6. *Мироненко, В.И.* Классы систем с совпадающими отражающими функциями / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 12. – С. 2173–2176.
7. *Бельский, В.А.* О построении уравнений Абеля, эквивалентных уравнению вида $\dot{x}=A(t)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3)$ / В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 55–61.

Поступила в редакцию 06.11.2020.