

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ПЕРВОГО ТИПА

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, А.А. Драпеза

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

A CRITERION FOR THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF POLYORTHOGONAL POLYNOMIALS OF THE FIRST TYPE

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko, A.A. Drapeza

F. Scorina Gomel State University

Для произвольной системы степенных рядов лорановского типа сформулирован и доказан критерий единственности ассоциированных с этой системой полиортогональных многочленов первого типа, найден явный вид этих многочленов, а также явный вид соответствующего многочлена второго рода. Доказанные утверждения дополняют хорошо известные результаты в теории ортогональных и полиортогональных многочленов.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, нормальный индекс, совершенная система, определители Ганкеля, полиортогональные многочлены.

A criterion for the uniqueness of polyorthogonal polynomials of type I associated with an arbitrary system of power series of the Laurent type is formulated and proved. An explicit form of these polynomials and an explicit form for the corresponding polynomial of the second kind is found. The proven statements complement well-known results in the theory of orthogonal and polyorthogonal polynomials.

Keywords: orthogonal polynomials, normal index, perfect system, Hankel determinant, polyorthogonal polynomials.

Введение

В классической теории ортогональных многочленов хорошо известна формула для представления n -го ортогонального многочлена Q_n :

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, \quad (0.1)$$

где

$$s_i = \int_{\Delta} x^i d\mu(x) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

— последовательность степенных моментов меры μ , носитель которой совпадает с отрезком ортогональности Δ . Тождество (0.1) доказано Э. Шмидтом (см. [1], [2, с. 320, 333]) посредством ортогонализации линейно независимой системы $1, x, \dots, x^n$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ . В [3] установлен аналог формулы (0.1) для полиортогональных многочленов второго типа. В данной работе, в частности, доказывается, что аналогичные представления справедливы и для полиортогональных многочленов первого типа. Как и в [3] мы рассматриваем понятие ортогональности в более широком смысле (см., например, [4, с. 60], [5]), когда последовательность $\{s_i\}$ является произвольной, не связанной с мерой. В этой общей

ситуации установлен критерий существования и единственности полиортогональных многочленов первого типа, получены их явные представления в детерминантном виде, аналогичные формуле (0.1). Заметим, что распространению общей теории ортогональных многочленов на полиортогональные многочлены (другое название — «multiple orthogonal polynomial») посвящен ряд работ известных специалистов [6]–[11].

1 Полиортогональные многочлены первого типа. Определения и свойства

Множество k -мерных мультииндексов (индексов) $n = (n_1, \dots, n_k)$, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ — это сумма $|n| := n_1 + \dots + n_k$.

Пусть $s = (s_0, s_1, \dots)$ — произвольная последовательность комплексных чисел. В комплексном линейном пространстве $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, состоящем из многочленов, определим линейный функционал $\mathfrak{S}_s$: если $T \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и

$$T(z) = t_0 + t_1 z + \dots + t_n z^n,$$

то полагаем

$$\mathfrak{S}_s(T(z)) := t_0 s_0 + t_1 s_1 + \dots + t_n s_n.$$

Рассмотрим теперь k произвольных последовательностей $s^j = (f_0^j, f_1^j, \dots)$ и соответствующий им набор (систему)

$f = (f_1, \dots, f_k)$, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (1.1)$$

Обозначим через $\mathfrak{S}_{s^j}$ функционал, соответствующий последовательности s^j .

Определение 1.1. Пусть $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Многочлены $A_1, \dots, A_k$, все одновременно тождественно не равные нулю, для которых $\deg A_j \leq n_j - 1$ при $j = 1, \dots, k$, будем называть n -ми полиортогональными многочленами первого типа для системы f формальных степенных рядов (1.1), если

$$\sum_{j=1}^k \mathfrak{S}_{s^j} (A_j(z) z^v) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, |n| - 2. \quad (1.2)$$

В (1.2) предполагается, что $|n| \neq 1$. Если $|n| = 1$, то у мультииндекса n только одна компонента $n_{j_0} = 1$, остальные равны нулю. В этом случае по определению n -ми полиортогональными многочленами является набор многочленов

$$A = (A_1, \dots, A_k),$$

где $A_{j_0} \equiv 1$, а $A_j \equiv 0$ при $j \neq j_0$. Считаем также, что $\deg A_j = -1$, тогда и только тогда, когда $A_j \equiv 0$.

В том случае, когда μ_j ($j = 1, \dots, k$) является положительными борелевскими мерами на вещественной прямой с компактным бесконечным спектром, Δ_j – наименьший отрезок, содержащий спектр меры μ_j , а

$$f_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j, \quad j = 1, \dots, k \quad (1.3)$$

– соответствующий набор марковских функций, соотношения ортогональности (1.2) принимают привычный вид

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Delta_j} A_j(x) \cdot x^v d\mu_j(x) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, |n| - 2.$$

Функция f_j представляется рядом (1.1), в котором

$$f_i^j = \int_{\Delta_j} x^i d\mu_j(x) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

– последовательность степенных моментов меры μ_j .

Полиортогональные многочлены первого типа определяются условиями (1.2) не однозначно, а с точностью до числового множителя: если $A = (A_1, \dots, A_k)$ – набор полиортогональных многочленов, то при $\lambda \neq 0$ набор $\lambda A = (\lambda A_1, \dots, \lambda A_k)$ также состоит из полиортогональных многочленов. Эта неединственность может быть более существенной. Приведем соответствующий пример.

Пример 1.1. Пусть $k = 2$, $n = (2, 2)$, а

$$f_1(z) = -f_2(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1(z) &= (a + bz), \\ A_2(z) &= a + 2b - 2d + dz, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где a, b, d – любые действительные числа.

Определение 1.2. Будем говорить, что n -ые полиортогональные многочлены $A_1, \dots, A_k$ однозначно определяются условиями (1.2), если для любых двух наборов таких многочленов

$$A' = (A'_1, \dots, A'_k),$$

$$A'' = (A''_1, \dots, A''_k)$$

найдётся комплексное число λ , что $A'' = \lambda A'$.

Центральными в теории полиортогональных многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы.

Определение 1.3. Ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ называется нормальным для системы f , если для любого набора $A = (A_1, \dots, A_k)$ n -ых полиортогональных многочленов

$$\deg A_j = n_j - 1, \quad j = 1, \dots, k.$$

Определение 1.4. Система f называется совершенной, если все ненулевые индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для f .

Например, если носители Δ_j мер μ_j попарно не перекрываются (не имеют общих внутренних точек), то система $f = (f_1, \dots, f_k)$, состоящая из марковских функций (1.3), является совершенной [4, с. 159].

Нормальность индекса n является достаточным условием для того, чтобы n -ые полиортогональные многочлены условиями (1.2) определялись однозначно [4, с. 150]. Поэтому для совершенных систем такие многочлены определяются однозначно при любом $n \in \mathbb{Z}_+^k$. Следующий пример показывает, что уже при $k = 1$ это условие не является необходимым.

Пример 1.2. Пусть $k = 1$, $n = 3$, а

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{8}{z^4} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \dots$$

При таких предположениях полиортогональный многочлен $A_1(z)$ определяется однозначно и с точностью до числового множителя совпадает с многочленом $z-2$. Вместе с тем, поскольку $\deg A_1 = 1$, индекс $n = 3$ не является нормальным.

2 Критерий единственности. Явный вид полиортогональных многочленов первого типа

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой индекс. При $n_j \neq 0$ определим матрицу порядка $(|n| - 1) \times n_j$

$$G^j = \begin{pmatrix} f_0^j & f_1^j & \dots & f_{n_j-1}^j \\ f_1^j & f_2^j & \dots & f_{n_j}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^j & f_{|n|-1}^j & \dots & f_{|n|+n_j-3}^j \end{pmatrix},$$

а затем матрицу порядка $(|n|-1) \times |n|$

$$G_n = [G^1 \ G^2 \ \dots \ G^k].$$

При $n_j = 0$ считаем, что матрица G_n не содержит блок G^j . Рассмотрим также функциональные матрицы-строки порядка $1 \times |n|$

$$U_j(z) = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1 \ z \ \dots \ z^{n_j-1} \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0),$$

$$j = 1, \dots, k.$$

Заметим, что

$$U(z) := U_1(z) + \dots + U_k(z) =$$

$$= (1 \ z \ \dots \ z^{n_1-1} \ 1 \ z \ \dots \ z^{n_2-1} \ \dots \ 1 \ z \ \dots \ z^{n_k-1}).$$

Если к матрице G_n добавить в качестве последней строки строку $U_j(z)$, то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид

$$\det [G_n \ U_j(z)]^T =$$

$$= \begin{vmatrix} \cdot & \dots & \cdot & f_0^j & f_1^j & \dots & f_{n_j-1}^j & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & f_1^j & f_2^j & \dots & f_{n_j}^j & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-1}^j & \dots & f_{|n|+n_j-3}^j & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 1 & z & \dots & z^{n_j-1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Определение 2.1. Ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ будем называть допустимым для f , если ранг матрицы G_n равен $|n|-1$.

В примере 1.1 индекс $n = (2, 2)$ не является нормальным и не является допустимым, а в примере 2 индекс $n = 3$ не является нормальным, но является допустимым для рассматриваемых в этих примерах систем функций.

Определение 2.2. Систему f будем называть почти совершенной, если все ненулевые индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются допустимыми для f .

Сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 2.1. Для того, чтобы для ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ n -ые полиортогональные многочлены $A_1, \dots, A_k$ условиями (1.2) определялись однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был допустимым для f , т. е.

$$\text{rang } G_n = |n| - 1.$$

Если $\text{rang } G_n = |n| - 1$, то при определённом выборе нормирующего множителя справедливы тождества

$$A_j(z) = \det [G_n \ U_j(z)]^T, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть

$$A_j(z) = b_0^j + b_1^j z + \dots + b_{n_j-1}^j z^{n_j-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов многочленов A_j запишем в матричной форме систему линейных уравнений, равносильную условию (1.2):

$$G_n \times b^T = \theta^T, \quad (2.2)$$

где $b = (b_0^1 \dots b_{n_1-1}^1 \dots b_0^k \dots b_{n_k-1}^k)$ – матрица-строка порядка $1 \times |n|$, а θ – матрица-строка порядка $1 \times |n|$, все элементы которой равны нулю. Поскольку система (2.2) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что эта система имеет ненулевое решение, а множество всех её линейно независимых решений состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rang } G_n = |n| - 1$. В этом случае все остальные ненулевые решения можно получить умножением этого фундаментального решения на $\lambda \neq 0$. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\text{rang } F_n = |n|$. Покажем, что в этом случае многочлены, определённые равенствами (2.1), являются искомыми. Разлагая определитель в (2.1) по элементам последней строки, легко заметить, что $\deg A_j \leq n_j - 1$, и, по крайней мере, один из многочленов $\deg A_j$ тождественно не равен нулю. Остаётся доказать, что многочлены $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют условиям (1.2). Для этого, предположив, что $n_j \neq 0$, применим функционал $\mathfrak{S}_{s^j}$ к последней строке определителя (2.1), которую предварительно умножим на z^v .

Тогда сумма $\sum_{j=1}^k \mathfrak{S}_{s^j} (A_j(z) z^v)$ равна определителю

$$\begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{n_1-1}^1 & \dots & f_0^k & f_1^k & \dots & f_{n_k-1}^k \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_{n_1}^1 & \dots & f_1^k & f_2^k & \dots & f_{n_k}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-1}^k & \dots & f_{|n|+n_k-3}^k \\ f_v^1 & f_{v+1}^1 & \dots & f_{v+n_1-1}^1 & \dots & f_v^k & f_{v+1}^k & \dots & f_{v+n_k-1}^k \end{vmatrix},$$

в котором при $v = 0, 1, \dots, |n| - 2$ имеются две одинаковые строки. Такой определитель равен нулю, поэтому выполняются условия (1.2). $\square$

3 Замечания и следствия

Прежде всего следует сказать, что если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ не является допустимым для f , то многочлены, определяемые равенствами (2.1), не являются полиортогональными многочленами для f . Так для системы (f_1, f_2) из примера 1.1 и индекса $n = (2, 2)$, который не является допустимым,

полиортогональные многочлены определяются равенствами (1.4), в то время как, если их находить по формулам (2.1), получим, что A_1, A_2 тождественно равны нулю.

Из (2.1) следует, что компонента n_j заданного мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ определяет число коэффициентов ряда f_j , которое учитывается при построении полиортогональных многочленов. Если, например, $n_j = 0$, то матрица G_n и определители в (2.1) не содержат блока G^j . В этом случае $A_j \equiv 0$, а порядок мультииндекса $|n|$ определяется только оставшимися ненулевыми компонентами. В частности, если $n = (n_1, 0, \dots, 0)$, то $|n| = n_1$. отождествляя n_1 с n , видим, что как и в одномерном случае, в построениях $\{A_p(z)\}_{p=1}^k$ учитываются только коэффициенты ряда f_1 . Тогда из (2.1) следует, что $A_j \equiv 0$ при $j = 2, \dots, k$, а для A_1 справедливо представление

$$A_1(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{n-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_{n-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-2}^1 & f_{n-1}^1 & \dots & f_{n-3}^1 \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} \end{vmatrix},$$

в точности совпадающее (с учетом степени многочлена A_1) с классической формулой (0.1).

Хорошо известно [4, с. 54], что при $k = 1$ индекс $n \in \mathbb{N}$ является нормальным для f_1 тогда и только тогда, когда определитель Ганкеля,

$$H_1 = 1, \quad H_2 = f_0^1, \\ H_{n-1} = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{n-2}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_{n-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \dots & f_{2n-4}^1 \end{vmatrix}, \quad n > 2$$

отличен от нуля. Опираясь на теорему 2.1, с помощью тех же рассуждений, что и в одномерном случае, нетрудно получить критерий нормальности индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ при $k > 1$.

Следствие 3.1. Ненулевой мультииндекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным для f тогда и только тогда, когда

$$\prod_{j=1}^k \tilde{H}_n^{n_j} \neq 0,$$

где $\tilde{H}_n^{n_j}$ – определитель матрицы, полученной из матрицы G_n выбрасываем в ней столбца

$$(f_{n_j-1}^j \quad f_{n_j}^j \quad \dots \quad f_{|n|+n_j-3}^j)^T.$$

Следствие 3.1 позволяет сделать вывод о том, что любая совершенная система является

почти совершенной системой. Обратное утверждение, очевидно, неверно.

Следствие 3.2. Полиортогональные многочлены $A_1, \dots, A_k$ определяются однозначно для всех ненулевых мультииндексов $n \in \mathbb{Z}_+^k$ тогда и только тогда, когда система f является почти совершенной.

Для ненулевого мультииндекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ полиортогональные многочлены первого типа можно определить по аналогии с полиортогональными многочленами второго типа (см. [3]) как решение следующей задачи:

Найти такие не равные тождественно нулю многочлены $A_1, \dots, A_k$, $\deg A_j \leq n_j - 1$ ($j = 1, \dots, k$), что

$$\sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) - B(z) = \frac{c_n}{z^{|n|}} + \dots \quad (3.1)$$

где $B(z)$ – полиномиальная часть ряда

$$\sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z).$$

Условия (1.1) и (3.1) для отыскания многочленов A_j равносильны [4, с. 158]. Поэтому поставленная задача имеет решение. Многочлен $B(z)$ называют многочленом второго рода для набора $A = (A_1, \dots, A_k)$. Если f состоит из марковских функций (1.3), то [4, с. 158]

$$B(z) = \sum_{j=1}^k \int_{\Lambda_j} \frac{A_j(z) - A_j(\lambda)}{z - x} d\mu_j(x).$$

В общем случае

$$B(z) = \sum_{j=1}^k \mathfrak{S}_{s^j} \left(\frac{A_j(z) - A_j(\lambda)}{z - \lambda} \right), \quad (3.2)$$

где $\mathfrak{S}_{s^j}$ действует на многочлен переменной λ .

Чтобы доказать равенство (3.2) введём дополнительные обозначения. Заменяя в определителе (2.1) последнюю строку строкой

$$(f_{|n|+i-2}^1 \quad f_{|n|+i-1}^1 \quad \dots \quad f_{|n|+n_1+i-3}^1 \quad \dots \quad f_{|n|+i-2}^k \quad f_{|n|+i-1}^k \quad \dots \quad f_{|n|+n_k+i-3}^k),$$

получим новый определитель. Его обозначим через $d_{n,i}$. При $n_j \neq 0$ в матрице-строке $U_j(z)$ поменяем ненулевые элементы: 1 заменим 0, z заменим f_0^j , z^2 заменим $f_0^j z + f_1^j$ и т. д., наконец, z^{n_j-1} заменим $\sum_{p=0}^{n_j-2} f_p^j z^{n_j-p-2}$ (при $n_j = 1$ в

$U_j(z)$ единственный ненулевой элемент 1 заменим 0). Полученную матрицу-строку обозначим через $V_j(z)$. Определим матрицу-строку $V(z)$ равенством

$$V(z) = V_1(z) + \dots + V_k(z).$$

Следствие 3.3. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – допустимый индекс, а n -ые полиортогональные многочлены $A_1, \dots, A_k$ определяются равенствами (2.1).

Тогда многочлен $B(z)$, заданный формулой (3.2), представим в виде

$$B(z) = \det [G_n \quad V(z)]^T, \quad (3.3)$$

и для него

$$\sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) - B(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}}{z^{|n|+i-1}}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Определитель

$$\frac{A_j(z) - A_j(\lambda)}{z - \lambda}$$

отличается от определителя в правой части равенства (2.1) только тем, что в нём вместо строки U_j стоит строка

$$\left(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ z + \lambda \ \dots \ \sum_{p=0}^{n_j-2} z^{n_j-p-2} \lambda^p \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \right).$$

Применяя к последней строке этого определителя функционал $\mathfrak{S}_{s_j}$, а затем вычисляя сумму в (3.2), получим (3.3). Чтобы доказать (3.4), заметим, что из условий теоремы следует равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) = \\ & = \begin{vmatrix} f_0^1 & \dots & f_{n_1-1}^1 & \dots & f_0^k & \dots & f_{n_k-1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & \dots & f_{|n|+n_k-3}^k \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^1}{z^{i+1}} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^1}{z^{i-n_1+2}} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^k}{z^{i+1}} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^k}{z^{i-n_k+2}} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В полученном определителе из последней строки вычтем: первую строку, умноженную на z^{-1} , вторую строку, умноженную на z^{-2} , и так далее, вплоть до предпоследней строки, умноженной на $z^{-|n|+1}$. В результате в правой части предыдущего равенства получим определитель, у которого последний элемент каждого столбца состоит из многочлена относительно переменной z и ряда по степеням z^{-1} с лакунами. Сохраняя в последней строке этого определителя в каждом столбце только полиномиальную часть, придем к определителю $B(z)$ и представлению

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) - B(z) = \\ & = \begin{vmatrix} f_0^1 & \dots & f_{n_1-1}^1 & \dots & f_0^k & \dots & f_{n_k-1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & \dots & f_{|n|+n_k-3}^k \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+i-2}^1}{z^{|n|+i-1}} & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+n_1+i-3}^1}{z^{|n|+i-1}} & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+i-2}^k}{z^{|n|+i-1}} & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+n_k+i-3}^k}{z^{|n|+i-1}} \end{vmatrix} = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}}{z^{|n|+i-1}}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Заметим, что если ряд в (1.1) является формальным, то и соответствующий ряд в (3.4) также является формальным. $\square$

Следствие 3.4. Если ненулевой мультииндекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является допустимым для системы f , то

$$\deg B \leq \max \{n_1, \dots, n_k\} - 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt, E. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener / E. Schmidt // Math. Ann. – 1907. – Vol. 63. – P. 433 – 476.
2. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.- Л.: ГИТТЛ, 1949.
3. Рябченко, Н.В. Критерий существования и единственности полиортогональных многочленов второго рода / Н.В. Рябченко, В.А. Волков, А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 85–90.
4. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Соколин. – М.: Наука, 1988.
5. Frank, E. Orthogonality properties of C-fractions / E. Frank // Bull. Amer. Math. Soc. – 1955. – Vol. 58. – P. 384–390.
6. Aptekarev, A.I. Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi-Bessel polynomials / A.I. Aptekarev, F. Marcellán, I. Rocha // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 1. – P. 177–146.
7. Aptekarev, A.I. Multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev // Comput. Appl. Math. – 1998. – Vol. 99, № 1-2. – P. 423–447.
8. Aptekarev, A.I. The genetic sums' representation for the moments of a system of Stieltjes functions and its application / A.I. Aptekarev, V. Kaliaguine, J. Van Iseghem // Constr. Approx. – 2000. – Vol. 16. – P. 487–524.
9. Van Assche, W. Some classical multiple orthogonal polynomials / W. Van Assche, E. Coussement // J. Comput. Appl. Math. – 2001. – Vol. 127. – P. 317–347.
10. Aptekarev, A.I. Multiple orthogonal polynomials for classical weights / A.I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche // Transactions of the American Mathematical Society. – 2003. – Vol. 355, № 10. – P. 3887–3914.
11. Kuijlaars, A.B.J. Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights / A.B.J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky // Comm. Math. Phys. – 2009. – Vol. 286, № 1. – P. 217–275.

Поступила в редакцию 28.05.2020.