

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПОДГРУППЫ ШМИДТА

В.М. Селькин, И.В. Близнец

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH RESTRICTIONS ON THE SCHMIDT SUBGROUPS

V.M. Sel'kin, I.V. Blisnets

F. Scorina Gomel State University

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}$ -нормальной в G , если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является циклическим. В данной статье мы доказываем, что если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}$ -нормальна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна. Обобщены некоторые известные результаты.

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная группа, субнормальная подгруппа, $\mathfrak{U}$ -нормальная подгруппа, группа Шмидта.

Throughout the article, all groups are finite and G always denotes a finite group. A subgroup H of the group G is called $\mathfrak{U}$ -normal in G if every chief factor of the group G between H^G and H_G is cyclic. In this article, it is proved that if each Schmidt subgroup of the group G is either subnormal or $\mathfrak{U}$ -normal in G , then the derived subgroup G' is nilpotent. Some well-known results are generalized.

Keywords: finite group, nilpotent group, subnormal subgroup, $\mathfrak{U}$ -normal subgroup, Schmidt group.

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, и G всегда обозначает группу; подгруппа A группы G называется *модулярной* в G [1], если выполняются следующие условия:

- (i) $\langle X, A \cap Z \rangle = \langle X, A \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$ и
- (ii) $\langle A, Y \cap Z \rangle = \langle A, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $A \leq Z$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}$ -нормальной [2] или *строго $\mathfrak{U}$ -субнормальной* [3] в G , если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является циклическим.

Напомним также, что G называется *группой Шмидта*, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа группы G нильпотентна. С изучением и применениями групп Шмидта связано большое число публикаций (см., в частности, книги [4]–[7] и, прежде всего, это мотивировано тем, что каждая ненильпотентная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта).

В работе [8] В.Н. Семенчук доказал, что если каждая подгруппа Шмидта ненильпотентной группы G субнормальна в G , то G метанильпотентна, т. е. $G/F(G)$ является нильпотентной группой. Это важное наблюдение было развито в различных направлениях. В частности, В.С. Моныхов и В.Н. Княгина доказали [9], что в группах G с таким условием производная подгруппа G'

нильпотентна. А в работе В.А. Ведерникова [10] было получено полное описание групп с субнормальными подгруппами Шмидта. В работе [11] И.В. Близнец и В.М. Селькин установили, что если каждая подгруппа Шмидта ненильпотентной группы G модулярна в G' , производная подгруппа G' нильпотентна.

В последние годы исследования многих авторов (см., например, [12]–[23]) были связаны с изучением и применениями так называемых σ -субнормальных подгрупп [12]. Напомним, что подгруппа A в G называется σ -субнормальной в G [12], если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной, т. е. $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ_i -группой для некоторого i , для всех $i = 1, \dots, n$.

Отмеченные выше результаты работ [8], [9], [11] получили дальнейшее развитие также в теории σ -субнормальных подгрупп. В частности, доказано, что если каждая подгруппа Шмидта группы G σ -субнормальна, то G' является σ -нильпотентной группой, т. е. является прямым произведением σ -примарных групп [14]. Более того, в каждой группе G' , удовлетворяющей этому условию, имеется нормальная σ -нильпотентная подгруппа N с циклической факторгруппой G/N [21]. В работе [15] было доказано, что G' является σ -нильпотентной группой и в

случае, когда каждая подгруппа Шмидта группы G является либо σ -субнормальной, либо модулярной в G .

В данной работе докажем следующий результат в этом направлении.

Теорема 0.1. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}$ -нормальна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Следствие 0.2 [8, теорема 2]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то $G/F(G)$ нильпотентна.*

Следствие 0.3 (см. теорему в [9]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Следствие 0.4 (см. теорему в [11]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

1 Используемые леммы

В доказательстве основного результата мы используем следующие леммы.

Лемма 1.1 (см. предложение 1.8 и лемму 3.3 в [2] или теорему 1.1 и лемму 2.2 в [24]). *Пусть A и $N \leq E$ – подгруппы в G , где N является нормальной и A является $\mathfrak{U}$ -нормальной в G . Тогда:*

- (1) AN/N является $\mathfrak{U}$ -нормальной в G/N .
- (2) Если E/N является $\mathfrak{U}$ -нормальной в G/N , то E является $\mathfrak{U}$ -нормальной в G .
- (3) $A \cap E$ является $\mathfrak{U}$ -нормальной в E .
- (4) Если E является $\mathfrak{U}$ -нормальной в G , то $\langle A, E \rangle$ является $\mathfrak{U}$ -нормальной в G .

Лемма 1.2 [25, глава А, леммы 14.1, 14.2, 14.3 и теорема 14.4]. *Пусть A и $N \leq E$ – подгруппы в G , где N нормальна и A субнормальна в G . Тогда:*

- (1) AN/N является субнормальной в G/N .
- (2) Если $A \leq E$, то A субнормальна в E .
- (3) Если E/N субнормальна в G/N , то E субнормальна в G .
- (4) Если E субнормальна в G , то $\langle A, E \rangle$ является субнормальной в G .

Лемма 1.3 (см. [4, III, теорема 5.2] или [5, VI, теорема 24.2]). *Если G является группой Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{p}}$ – силовская p -подгруппа группы G и $Q = \langle x \rangle$ является циклической силовской q -подгруппой в G , $p \neq q$. Кроме того, $\langle x^q \rangle \leq \Phi(G)$ и P имеет экспоненту p или 4 (если P – неабелева 2-группа).*

Следующий простой факт хорошо известен (см., например, [5, I, следствие 7.7.2]).

Здесь мы доказываем его, не применяя теорию формаций.

Лемма 1.4. *Если A – субнормальная подгруппа в G , то $O_p(A) \leq O_p(G)$ для каждого простого p .*

Доказательство. По условию существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_{t-1} \leq A_t = G$ такая, что A_i является нормальной A_{i+1} для всех $i = 1, \dots, t-1$. Тогда по индукции имеет место $O_p(A) \leq O_p(A_{t-1})$. С другой стороны, $O_p(A_{t-1})$ характеристична в A_{t-1} и поэтому нормальна в $A_t = G$. Следовательно, $O_p(A_{t-1}) \leq O_p(G)$. $\square$

2 Доказательство теоремы 0.1.

Предположим, что эта теорема неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

(1) Если E – собственная подгруппа в G , то $E' \leq F(E)$ (это следует из леммы 1.2 (2) и выбора G).

(2) Если N – минимальная нормальная подгруппа в G , то $(G/N)' \leq F(G/N)$.

Мы используем здесь одно рассуждение А.Н. Скибы из его работы [26] (см. также доказательство теоремы 1.9 в статье [27]).

Если G/N нильпотентна, то это очевидно. Теперь предположим, что G/N не является нильпотентной, и пусть E/N – произвольная подгруппа Шмидта в G/N . Пусть H – минимальное добавление к N в E . Тогда $H/(H \cap N) \simeq HN/N = E/N$ – группа Шмидта и $H \cap N \leq \Phi(H)$. Пусть $\Phi = \Phi(H)$ и A – подгруппа Шмидта в H .

Из леммы 1.3 вытекает, что

$$(H/(H \cap N))/\Phi(H/(H \cap N)) = (H/(H \cap N))/(\Phi/(H \cap N)) \simeq H/\Phi = P \rtimes Q,$$

где P – силовская p -подгруппа, Q – силовская q -подгруппа в H/Φ и $|Q| = q$ для некоторых простых чисел $p \neq q$. Отсюда, снова по лемме 1.3, следует, что $A = A_p \rtimes A_q$, где $A = (A_q)^A$. Тогда $A_q \not\leq \Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q / \Phi$ является силовской q -подгруппой в H/Φ , и поэтому

$$(\Phi A_q / \Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi / \Phi = H / \Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H = H$, поэтому

$$E = HN = (A_q)^H N.$$

Согласно леммам 1.1 (4) и 1.2 (4), $(A_q)^H = A^H$ является либо субнормальной либо $\mathfrak{U}$ -нормальной подгруппой в G и, следовательно, $E/N = (A_q)^H N/N$ либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}$ -нормальна в G/N по леммам 1.1 (1) и 1.2 (1).

Следовательно, гипотеза верна для G/N , поэтому выбор G подразумевает, что мы имеем (2).

(3) G разрешима.

Ввиду утверждений (1) и (2) достаточно лишь показать, что G не является неабелевой простой группой. Предположим, что это неверно, и пусть A – произвольная подгруппа Шмидта из G . По условию A либо субнормальна, либо $\mathcal{U}$ -нормальна в G . С другой стороны, G – неабелева простая группа. Следовательно, A $\mathcal{U}$ -нормальна в G и $A_G = 1$. Но тогда $1 < A^G$ и каждый главный фактор G ниже A^G является циклическим. Следовательно, G не является неабелевой простой группой. Это противоречие завершает доказательство утверждения (3).

(4) Если R – минимальная нормальная подгруппа в G , то $R \not\leq \Phi(G)$ и для некоторого простого числа p имеет место

$$R = C_G(R) = O_p(G) = F(G).$$

Кроме того, $|R| > p$ и для некоторой максимальной подгруппы M из G имеет место $G = R \rtimes M$.

Прежде заметим, что для некоторого простого p имеет место $R \leq O_p(G)$ ввиду утверждения (3). Утверждение (2) подразумевает, что производная подгруппа

$$(G/R)' = G'R/R \simeq G'/(G' \cap R)$$

группы G/R нильпотентна. Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $L \neq R$. Тогда $G'/(G' \cap L)$ нильпотентна, и поэтому

$$G' \simeq G'/((G' \cap R) \cap (G' \cap L)) = G'/(R \cap L)$$

нильпотентна. Поэтому $G/F(G)$ абелева, что противоречит выбору G . Поэтому R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $R \leq G'$. Более того, $R \not\leq \Phi(G)$, так как в противном случае G' нильпотентна согласно [25, глава A, лемма 13.2]. Следовательно, $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$ согласно [25, глава A, теорема 15.6 (2)]. Отметим наконец, что R не является циклической группой, так как в противном случае группа

$$G/C_G(R) = G/R = G/F(G)$$

является циклической. Следовательно, мы имеем (4).

(5) $M \simeq G/R$ нильпотентна. Следовательно, R является силовой p -подгруппой G .

Предположим, что M не является нильпотентной, и пусть H – подгруппа Шмидта в M . Тогда H либо субнормальна, либо $\mathcal{U}$ -нормальна в G . В первом случае для некоторого простого числа q имеет место $O_q(H) \neq 1$. Тогда $O_q(H) \leq O_q(G) \leq R$ по утверждению (4) и лемма 1.4, поэтому $R \cap M \neq 1$. Это противоречие показывает, что, H является $\mathcal{U}$ -нормальной в G . Также ясно, что $H_G = 1$, поэтому каждый главный фактор G ниже H^G циклический. Но $R \leq H^G$ по утверждению (4) и, следовательно, R

является циклической, что противоречит утверждению (4). Это противоречие показывает, что $M \simeq G/R$ нильпотентна. Тогда

$$O_p(M)R \leq O_p(G) = R.$$

Следовательно, $O_p(M) = 1$, поэтому утверждение (5) выполнено.

(6) M – группа Миллера – Морено (т. е. M не является абелевой, но каждая собственная подгруппа в M является абелевой). Более того, M является q -группой для некоторого простого числа $q \neq p$.

Прежде отметим, что M является холловой p' -подгруппой в G ввиду утверждений (4) и (5).

Теперь пусть S – произвольная максимальная подгруппа в M . Тогда $RS/F(RS)$ абелева ввиду утверждения (1). Тогда $R = (RS)'$ ввиду утверждений (4) и (5) и, следовательно, $S \simeq RS/R$ абелева. Следовательно, выбор G и утверждение (5) влекут, что мы имеем (6).

Заключительное противоречие. Ввиду утверждения (6), $Z(M) \cap \Phi(M) \neq 1$. Пусть Z – подгруппа порядка q в $Z(M) \cap \Phi(M)$ и пусть $E = RZ$. Тогда E не является нильпотентной в силу утверждения (4). С другой стороны,

$$R = R_1 \times \dots \times R_t,$$

где R_k – минимальная нормальная подгруппа в E для всех $k = 1, \dots, t$ по теореме Машке. Следовательно, для некоторого i подгруппа $R_i \rtimes Z$ не является нильпотентной, поэтому эта подгруппа содержит подгруппу Шмидта вида $A = A_p \rtimes Z$.

Предположим, что $A < E$. Тогда $|A_p| < |R|$ и $A_G = 1$. Согласно гипотезе, A является либо субнормальной либо $\mathcal{U}$ -нормальной подгруппой в G . Сначала предположим, что A субнормальна в G . Тогда в E имеется такая собственная подгруппа V , что $A \leq V$ и V нормальна в E . Поскольку $Z \leq V < E$, то для некоторого k имеем $R_k \not\leq V$. Тогда $R_k \cap V = 1$, следовательно, $R_k \leq C_E(V)$, поэтому $R_k \leq N_G(Z) = M$, где M максимальна в G , противоречие. Следовательно, A не является субнормальной в G . Понятно также, что $A_G = 1$ поэтому $R \leq T^G$ ввиду утверждения (4). Но тогда R является циклической, что противоречит утверждению (4).

Следовательно, $A = E$, поэтому $R = A_p$ и Z действует неприводимо на R . Понятно, что $Z \leq \Phi(M)$, поэтому каждая собственная подгруппа группы M действует неприводимо на R , из чего следует, что каждая максимальная подгруппа из M является циклической. Следовательно, $q = 2$, и поэтому $|R| = p$, что противоречит утверждению (4). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
2. Hu, B. Finite groups with only $\mathfrak{F}$ -normal and $\mathfrak{F}$ -abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.
3. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – № 550. – P. 69–85.
4. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва, Наука, 1978.
6. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
7. Ballester-Bolínches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolínches, L.M. Ezquerro. – Springer, Dordrecht, 2006.
8. Семенчук, В.Н. Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$ -подгрупп / В.Н. Семенчук, в книге: Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и Техника, 1981. – С. 138–149.
9. Монахов, В.С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // Сибирск. матем. ж. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.
10. Ведерников, В.А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.
11. Блинец, И.В. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Блинец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 36–38.
12. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
13. Beidleman, J.C. On τ_σ -quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.
14. Al-Sharo, K.A. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / K.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.
15. Hu, B. On finite groups with generalized σ -subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.
16. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.
17. Skiba, A.N. On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – № 3. – P. 35–47.
18. Guo, W. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Sci. China Math. – 2019. – № 62. – P. 1355–1372.
19. On σ -subnormality criteria in finite σ -soluble groups / A. Ballester-Bolínches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // RACSAM. – 2020. – Vol. 114, № 94. – <https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4>.
20. On σ -subnormal subgroups of factorised finite groups / A. Ballester-Bolínches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // J. Algebra. – 2020. – № 559. – P. 195–202.
21. Yi, X. Finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – № 560. – P. 181–191.
22. Kamornikov, S.F. On σ -subnormal subgroups of finite groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutytyanov // Siberian Math. J. – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.
23. Kamornikov, S.F. On σ -subnormal subgroups of finite $3'$ -groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutytyanov // Ukrainian Math. J. – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.
24. Chi, Z. On a lattice characterization of finite soluble PST -groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Bull. Aust. Math. Soc. – 2019. – [doi:10.1017/S0004972719000741](https://doi.org/10.1017/S0004972719000741).
25. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.
26. Skiba, A.N. Finite groups with abnormal Schmidt subgroup / A.N. Skiba. – Preprint, 2019.
27. Хуанг, Ц. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуанг, Б. Ху, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 60, № 6. – С. 116–124.

Поступила в редакцию 18.06.2020.