МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ $3'$ - ИНДЕКС

С.Ф. Каморников[1], **В.Н. Тютянов**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Международный университет «МИТСО», Гомель*

FINITE SIMPLE GROUPS ALL THE MAXIMAL SUBGROUPS OF WHICH HAVE $3'$-INDEX

S.F. Kamornikov[1], **V.N. Tyutyanov**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel*

Изучаются конечные простые неабелевы группы, все максимальные подгруппы которых имеют $3'$-индекс.

Ключевые слова: *конечная группа, максимальная подгруппа, $3'$-индекс, простая неабелева группа.*

The finite simple non-abelian groups all the maximal subgroups of which have $3'$-index are studied.

Keywords: *finite group, maximal subgroup, $3'$-index, simple non-abelian group.*

Введение

Строение конечной группы существенно зависит от наличия в ней максимальных подгрупп с заданными свойствами и способа их вложения в группу. Среди работ, относящихся к данной тематике, отметим, прежде всего, работы, в которых изучались конечные простые неабелевы группы с заданными ограничениями на индексы максимальных подгрупп. В работе Р. Гуральника [1] описаны простые неабелевы группы, имеющие максимальную подгруппу примарного индекса. Л.С. Казарин в [2] описал простые неабелевы группы, обладающие максимальной холловой подгруппой примарного индекса.

В работах М. Либека, Я. Саксла [3] и В. Кантора [4] установлены списки максимальных подгрупп классических групп лиевского типа (линейные группы, симплектические группы, унитарные группы и ортогональные группы), которые могут иметь нечетный индекс в группе. Однако в этих работах не указано, какие из этих подгрупп в точности имеют нечетный индекс.

Данный пробел был устранен Н.В. Масловой в серии ее работ. Отметим, прежде всего, ее статьи [5], [6]. Также Н.В. Масловой в [7] была получена полная классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем.

В связи с отмеченными результатами кажется естественным описание конечных простых неабелевых групп, у которых все максимальные подгруппы имеют p'-индекс для некоторого простого числа p. Особенно интересны случаи, когда $p \in \{2,3\}$. Это объясняется тем, что:

1) в силу классической теоремы Томпсона – Фейта порядок любой простой неабелевой группы делится на 2;

2) среди простых неабелевых групп только группы Судзуки имеют порядок, взаимно простой с числом 3.

Случай $p = 2$ исследован в работе [8]: любая максимальная подгруппа конечной простой неабелевой группы G имеет нечетный индекс тогда и только тогда, когда $G \simeq A_7$. В настоящей работе рассматривается случай $p = 3$. Главная наша цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть G – конечная простая неабелева группа, у которой любая максимальная подгруппа имеет $3'$-индекс. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *G не является знакопеременной группой*;

2) *G не является спорадической группой*;

3) *G не является группой лиевского типа, определенной над полем характеристики* 3;

4) *G не является исключительной группой лиевского типа, определенной над полем характеристики, взаимно простой с числом* 3;

5) *если $G \simeq PSL_2(q)$, то $q = 7$*;

6) *если $G \simeq PSL_3(q)$, то в G все максимальные подгруппы имеют $3'$-индекс тогда и только тогда, когда $q + 1 = 3m$, где $(m,3) = 1$.*

1 Определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения,

© *Каморников С.Ф., Тютянов В.Н.*, 2020

принятые в [9], [10]. Если G – группа лиевского типа, то P_i – максимальная параболическая подгруппа группы G, полученная удалением в соответствующей группе G диаграмме Дынкина i-ой вершины.

***Лемма* 1.1** [11, лемма 1.5]. *Пусть G – простая группа Шевалле и L – максимальная подгруппа в G. Если унипотентная подгруппа U содержится в L, то L – параболическая подгруппа группы G.*

***Лемма* 1.2** [12, лемма 3]. *Пусть G – простая группа Шевалле и*

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Тогда существует простой делитель порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G.

По аналогии с [5] пусть

$$\{F_i, G_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}\}_{i=1}^{\infty}$$

– набор функций таких, что F_i ставит в соответствие каждому натуральному числу его остаток от деления на 3^i, а G_i ставит в соответствие каждому натуральному числу n его неполное частное $\left[\frac{n}{3^i}\right]$ при делении на 3^i, т. е. для всех натуральных чисел n и i выполняются соотношения $n = F_i(n) + 3^i G_i(n)$, $0 \le F_i < 3^i$, $G_i(n) = \left[\frac{n}{3^i}\right]$.

***Лемма* 1.3**. *Пусть m и t – натуральные числа. Тогда для всякого натурального числа i имеет место неравенство $G_i(mt) - tG_i(m) \ge 0$.*

Доказательство: Из определения функций F_i и G_i следует, что имеют место равенства $m = F_i(m) + 3^i G_i(m)$ и $t = F_i(t) + 3^i G_i(t)$. При этом выполняются неравенства $F_i(m) \ge 0$, $G_i(m) \ge 0$, $F_i(t) \ge 0$ и $G_i(t) \ge 0$. Поэтому

$$mt = F_i(m)F_i(t) +$$
$$+3^i(F_i(m)G_i(t) + G_i(m)F_i(t) + 3^i G_i(m)G_i(t)).$$

Отсюда следует

$$mt \ge 3^i(F_i(m)G_i(t) + G_i(m)F_i(t) + 3^i G_i(m)G_i(t)).$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$G_i(mt) \ge F_i(m)G_i(t) + G_i(m)F_i(t) + 3^i G_i(m)G_i(t).$$

Так как $tG_i(m) = G_i(m)F_i(t) + 3^i G_i(m)G_i(t)$, то $G_i(mt) - tG_i(m) \ge F_i(m)G_i(t) \ge 0$. □

***Лемма* 1.4**. *Пусть $m > 1$ и $t \ge 3$ – натуральные числа. Тогда и только тогда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) + t\sum_{i=1}^{\infty} G_i(m),$$

когда $m = 3^w$, где w – некоторое натуральное число. Если $m \ne 3^w$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) > \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) + t\sum_{i=1}^{\infty} G_i(m).$$

Доказательство: Пусть $m = 3^w$, где w – натуральное число. Тогда $G_i(m) = \frac{m}{3^i} = 3^{w-i}$ при $i \le w$ и $G_i(m) = 0$ при $i > w$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t\sum_{i=1}^{\infty} G_i(m) =$$
$$= \sum_{i=1}^{w} G_i(3^w t) + \sum_{i=w+1}^{\infty} G_i(3^w t) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - \sum_{i=1}^{w} \frac{3^w t}{3^i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{w} 3^{w-i} t + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - \sum_{i=1}^{w} 3^{w-i} t = 0.$$

Пусть теперь $m \ne 3^w$. Рассмотрим два случая.

1. $m = 2$. Тогда $G_i(2) = 0$ для всех $i \ge 1$. Поэтому $t\sum_{i=1}^{\infty} G_i(2) = 0$. По лемме 1.3 имеем

$$G_i(2t) - G_i(t) \ge 2G_i(t) - G_i(t) = G_i(t) \ge 0.$$

Отсюда следует, что

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(2t) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (G_i(2t) - G_i(t)) \ge \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) \ge 0.$$

А так как $t \ge 3$, то $G_1(t) \ge 1$. Поэтому $S > 0$.

2. $m > 3$. Пусть $m = \alpha_1 3^{m_1} + \alpha_2 3^{m_2} + \ldots + \alpha_k 3^{m_k}$ – 3-адическое разложение числа m, где $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ и $1 \le \alpha_i < 3$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Так как $m \ne 3^w$, то $k > 1$. Так как

$$m = \alpha_1 3^{m_1} + \alpha_2 3^{m_2} + \ldots + \alpha_k 3^{m_k} \le$$
$$\le 2(3^{m_1} + 3^{m_2} + \ldots + 3^{m_k}),$$

то

$$\frac{m}{3^{m_k+1}} \le \frac{2 \cdot 3^{m_k}}{3^{m_k+1}}\left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \ldots + \frac{1}{3^{k-1}}\right) = 1 - \frac{1}{3^k}.$$

Отсюда следует, что $G_i(m) = 0$ при $i > m_k$. Поэтому имеем

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t\sum_{i=1}^{\infty} G_i(m) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m_k} G_i(mt) + \sum_{i=m_k+1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t\sum_{i=1}^{m_k} G_i(m) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m_k} (G_i(mt) - tG_i(m)) + \sum_{i=m_k+1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t).$$

Поскольку $m > 3^{m_k}$, то $G_i(mt) \ge G_i(3^{m_k} t)$. А так как $\sum_{i=m_k+1}^{\infty} G_i(3^{m_k} t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t)$, то отсюда следует, что $\sum_{i=m_k+1}^{\infty} G_i(mt) \ge \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t)$. По лемме 1.3 в сумме $\sum_{i=1}^{m_k} (G_i(mt) - tG_i(m))$ каждое слагаемое неотрицательно, следовательно, и вся сумма также неотрицательна. Таким образом, $S \ge 0$.

Покажем, что $S > 0$. Так как $k > 1$, то сумма

$$\sum_{i=1}^{m_k} (G_i(mt) - tG_i(m))$$

содержит слагаемое $G_{m_1+1}(mt)-tG_{m_1+1}(m)$. Оценивая его, получаем

$$G_{m_1+1}(mt)-tG_{m_1+1}(m)=$$
$$=[\alpha_1 t3^{-1}+\alpha_2 t3^{m_2-m_1-1}+...+\alpha_k t3^{m_k-m_1-1}]-$$
$$-t[\alpha_1 3^{-1}+\alpha_2 3^{m_2-m_1-1}+...+\alpha_k 3^{m_k-m_1-1}]=\left[\frac{\alpha_1 t}{3}\right].$$

Так как $t\geq 3$, то $\left[\frac{\alpha_1 t}{3}\right]\geq 1$. Но тогда $S>0$. □

***Лемма* 1.5.** *Пусть $Soc(G)\simeq A_n$ и $n\geq 5$. Если индекс $|G:H|$ не делится на 3 для любой максимальной подгруппы H группы G, то G является $3'$ -группой.*

Доказательство: Пусть сначала $G\simeq S_n$. Так как подгруппа S_{n-1} максимальна в S_n и $|S_n:S_{n-1}|=n$, то полагаем, что $(n,3)=1$.

Пусть n – составное число, т. е. $n=mt$, где $m>1$ и $t>1$. Выберем в качестве m наименьшее простое число, делящее n. Так как $n\geq 5$, то тогда $t\geq 3$. В соответствии с [13] подгруппа $H=S_m wrS_t$ всегда является максимальной в S_n. При этом справедливо равенство

$$|G:H|=\frac{n!}{(m!)^t t!}.$$

По лемме 1.4 имеем

$$|G:H|_3=3^{\sum_{i=1}^{\infty}G_i(mt)-\sum_{i=1}^{\infty}G_i(t)-t\sum_{i=1}^{\infty}G_i(m)}\geq 3,$$

что противоречит условию.

Следовательно, $n=p$ – простое число. Рассмотрим подгруппу H вида $AGL_1(p)$. Из [13] следует, что эта подгруппа всегда максимальна в S_p. При этом индекс подгруппы $AGL_1(p)$ в S_p, очевидно, делится на 3, что противоречит условию леммы.

Пусть теперь $G\simeq A_n$. Как и выше достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $(n,3)=1$. Если $n=mt$ – составное число, то выберем в качестве m наименьшее простое число, делящее n. Так как $n\geq 5$, то $t\geq 3$. При этом из [10] следует, что $n\neq 8$. Тогда из того, что $A_n\lhd S_n$ и подгруппа вида $S_m wrS_t$ ввиду [13] всегда максимальна в S_n, получаем, что $A_n(S_m wrS_t)=S_n$ и

$$|A_n:(S_m wrS_t)\cap A_n|=|S_n:(S_m wrS_t)|.$$

Теперь по лемме 1.4 имеем

$$|A_n:(S_m wrS_t)\cap A_n|_3=3^{\sum_{i=1}^{\infty}G_i(mt)-\sum_{i=1}^{\infty}G_i(t)-t\sum_{i=1}^{\infty}G_i(m)}\geq 3,$$

что противоречит условию.

Таким образом, $n=p$ – простое число. При этом из [10] следует, что $n>13$. Тогда из таблицы 1 работы [13] следует, что подгруппа $H=AGL_1(p)\cap A_n$ максимальна в A_n при $n\neq 17$ и $n\neq 23$. При этом индекс подгруппы $AGL_1(p)\cap A_n$ в S_n делится на 3.

Если $p=17$, то подгруппа $H\simeq 17:8$ содержится в максимальной подгруппе вида $PSL_2(16).4$. Так как $|PSL_2(16).4|=2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 17$, то индекс $|G:(PSL_2(16).4)|$, очевидно, делится на 3, что противоречит условию леммы.

При $r=23$ подгруппа $H\simeq 23:11$ содержится в максимальной подгруппе вида M_{23}. Так как $|M_{23}|=2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 23$, то индекс $|G:M_{23}|$ делится на 3. Снова приходим к противоречию с условием. □

2 Доказательство теоремы

Рассмотрим все классы простых неабелевых групп.

1. *G – спорадическая группа.*

Таблица 2.1 – Простые спорадические группы

	Группа G	Подгруппа H	Индекс $\|G:H\|$
1	M_{11}	$L_2(11)$	12
2	M_{12}	M_{11}	12
3	M_{22}	$2^4:S_5$	231
4	M_{23}	$23:11$	40320
5	M_{24}	M_{23}	24
6	J_1	$11:10$	1596
7	$J_2=HJ$	$A_4\times A_5$	840
8	HS	$4^3:L_3(2)$	4125
9	J_3	$L_2(16):2$	6156
10	McL	$U_3(5)$	7128
11	He	$S_4(4):2$	2058
12	Ru	${}^2F_4(2)$	4060
13	Suz	$G_2(4)$	1782
14	$O'N$	$L_3(7):2$	122760
15	Co_3	$McL:2$	276
16	Co_2	$HS:2$	476928
17	Fi_{22}	$2.U_6(2)$	3510
18	HN	A_{12}	1140000
19	Ly	$G_2(5)$	8835156
20	Th	${}^3D_4(2):3$	143127000
21	Fi_{23}	$2.Fi_{22}$	31671
22	Co_1	Co_2	98280
23	J_4	$2^{11}:M_{24}$	8474719242
24	Fi_{24}'	Fi_{23}	306936
25	$B=F_{2+}$	47:23	$2^{41}\cdot 3^{13}\cdot 5^6\cdot 7^2\times$ $\times 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 31$
26	$M=F_1$	59:29	$2^{28}\cdot 3^7\cdot 5^7\cdot 7^5\cdot 11\times$ $\times 13^2\cdot 19\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 71$

Как следует из [10], каждая простая спорадическая группа G содержит максимальную подгруппу H индекса, делящегося на 3 (значение индекса подгруппы H в G приведено в таблице 2.1).

2. $G \simeq A_n$, где $n \geq 5$. Ввиду леммы 1.5 в группе G всегда найдется максимальная подгруппа, индекс которой делится на 3.

3. *G – простая группа лиевского типа.*

Пусть сначала группа G определена над полем характеристики 3. По условию все максимальные в G подгруппы содержат силовскую 3-подгруппу группы G. Из леммы 1.1 следует, что любая максимальная в G подгруппа является параболической. Если

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\},$$

то по лемме 1.2 найдется простой делитель r порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G. Следовательно, максимальная подгруппа, содержащая силовскую r-подгруппу группы G, не является параболической. Последнее невозможно. Таким образом,

$$G \in \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

В случае $G \simeq {}^2A_3(2) \simeq PSp_4(3)$ из [10] следует, что группа G имеет максимальную подгруппу, индекс которой делится на 3. Остальные группы из приведенного списка определены над полем характеристики 2, что невозможно.

Следовательно, группа G определена над полем характеристики, взаимно простой с 3.

(1) $G \simeq Sz(2^{2n+1})$. В этом случае утверждение очевидно.

(2) $G \simeq E_6(q)$. Пусть $P = P_4$, тогда

$$|G:P| =$$

$$= \frac{(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)} =$$

$$= \frac{(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)}{(q-1)(q^3-1)(q^4-1)} =$$

$$= (q^4+1)(q^9+q^6+q^3+1)(q^8+q^7+q^6+$$

$$+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1) = ABC.$$

1) $q = 3t+1$. Тогда C делится на 3.

2) $q = 3t+2$. Тогда

$$B \equiv (2^9+2^6+2^3+1)(\mathrm{mod}\,3) \equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

Значит, B делится на 3.

(3) $G \simeq E_7(q)$. Пусть $P = P_6$, тогда

$$|G:P| = \frac{(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} \times$$

$$\times \frac{(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)}{(q^5-1)(q^6-1)(q^7-1)} =$$

$$= (q^4+1)(q^5+1)(q^7+1) \cdot \frac{q^{12}-1}{q^3-1} \cdot \frac{q^{18}-1}{q-1} =$$

$$= A \cdot \frac{q^{12}-1}{q^3-1} \cdot \frac{q^{18}-1}{q-1} =$$

$$= A(q^9+q^6+q^3+1)(q^{17}+q^{16}+\ldots+q+1) = ABC.$$

1) $q = 3t+1$. Тогда $C \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

2) $q = 3t+2$. Тогда

$$B \equiv (2^9+2^6+2^3+1)(\mathrm{mod}\,3) \equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

(4) $G \simeq E_8(q)$. Пусть $P = P_5$, тогда

$$|G:P| = \frac{(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} \times$$

$$\times \frac{(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)}{(q^5-1)(q^6-1)(q^7-1)(q^8-1)} =$$

$$= (q^6+1)(q^7+1) \cdot \frac{q^{18}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{20}-1}{q^3-1} \cdot \frac{q^{24}-1}{q^4-1} \cdot \frac{q^{30}-1}{q^5-1}.$$

Если $q = 3t+1$, то

$$q^7+1 \equiv (2^7+1)(\mathrm{mod}\,3) \equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

Если $q = 3t+2$, то $\dfrac{q^{30}-1}{q-1} \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

(5) $G \simeq G_2(q)$. Имеем

$$|G_2(q)| = q^6(q^6-1)(q^2-1).$$

Группа G имеет максимальные подгруппы $H_1 = SL_3(q):2$ и $H_2 = q^{2+3}:GL_2(q)$ [14, с. 127]. Тогда

$$|G:H_2| = \frac{q^6(q^6-1)(q^2-1)}{q^6(q-1)(q^2-1)} =$$

$$= q^5+q^4+q^3+q^2+q+1.$$

Если $q = 3t+1$, то, очевидно, $|G:H_2| \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. Далее

$$|G:H_1| = \frac{q^6(q^6-1)(q^2-1)}{2q^3(q^2-1)(q^3-1)} = \frac{q+1}{2} \cdot q^3(q^2-q+1).$$

Если $q = 3t+2$, то $q+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

(6) $G \simeq {}^3D_4(q)$. Имеем

$$|{}^3D_4(q)| = q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1) =$$

$$= q^{12}(q^4-q^2+1)(q^4+q^2+1)(q^6-1)(q^2-1).$$

Группа G имеет максимальную подгруппу $H = (q^4-q^2+1):4$ [14, с. 144]. Тогда

$$|G:H| = \frac{1}{4}q^{12}(q^4+q^2+1)(q-1)^2(q+1) \times$$

$$\times (q^5+q^4+q^3+q^2+q+1).$$

Если $q = 3t+1$, то

$$q^5+q^4+q^3+q^2+q+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

Если $q = 3t+2$, то $q+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

(7) $G \simeq F_4(q)$. Имеем

$$|F_4(q)| = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1).$$

Группа G имеет максимальную подгруппу $H = q^{2+6+12}:(SL_2(q) \times SL_3(q)).(q-1)$ [14, с. 161]. Тогда

$$|G:H| = \frac{q^{12}-1}{q-1} \cdot (q^3+1) \cdot \frac{q^8-1}{q^2-1}.$$

Если $q = 3t+1$, то $\dfrac{q^{12}-1}{q-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$.

Если $q = 3t+2$, то $q^3+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$.

(8) $G \simeq {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2m+1}$. При $m = 0$ получаем группу, которая не является простой, а ее коммутант группа Титса ${}^2F_4(q)'$ – простая неабелева группа. Из [10] следует, что ее максимальная подгруппа $PSL_2(25)$ имеет индекс 2304. Поэтому $m \geq 1$. Имеем

$$|\,{}^2F_4(q)\,| = q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1).$$

Группа G содержит максимальную подгруппу

$$H_1 = (q+1)^2 : GL_2(3)$$

[14, с. 166]. Ее порядок равен $16 \cdot 3 \cdot (q+1)^2$.

Если $q = 3t+1$, то $(|\,G : H_1\,|, 3) = 3$. Группа G содержит максимальную подгруппу

$$H_2 = Sp_4(q) : 2$$

порядка $q^4(q^2-1)(q^4-1)$ [14, с. 166]. Тогда

$$|\,G : H_2\,| = q^8(q^6+1)(q^2-q+1).$$

Если $q = 3t+2$, то $q^2-q+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$.

(9) $G \simeq {}^2E_6(q)$. Группа G имеет максимальную параболическую подгруппу P, для которой

$$|\,G : P\,| =$$

$$= \frac{(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)}{2(q-1)(q^6+1)(q^5-1)(q^4+1)(q^3-1)(q^2+1)} =$$

$$= \frac{(q^6-1)(q^9+1)(q^2-1)(q^3+1)(q^5+1)(q+1)}{2(q^5-1)} =$$

$$= \frac{(q^6-1)(q^9+1)(q^3+1)(q^5+1)(q+1)^2}{2(q^4+q^3+q^2+q+1)}.$$

Если $q = 3t+1$, то $(q^4+q^3+q^2+q+1, 3) = 1$.

Если $q = 3t+2$, то также

$$(q^4+q^3+q^2+q+1, 3) = 1.$$

Отсюда легко следует, что $(|\,G : P\,|, 3) = 3$.

(10) $G \simeq PSL_2(q)$, $q \notin \{2,3\}$. Группа $PSL_2(q)$ содержит подгруппу Бореля индекса $q+1$, которая максимальна в $PSL_2(q)$. Поэтому $q-1$ делится на 3. Мономиальная подгруппа имеет в $PSL_2(q)$ индекс $\dfrac{q(q-1)}{d}$, где $d = (2, q-1)$, и максимальна в $PSL_2(q)$ при нечетных $q > 11$ и всех четных q. При $q \leq 11$ только в группе $PSL_2(7)$ все максимальные подгруппы имеют $3'$-индекс [10]. При $q > 11$ мономиальная подгруппа максимальна в $PSL_2(q)$ и ее индекс делится на 3.

(11) $G \simeq PSL_3(q)$. В силу изоморфизма $PSL_3(2) \simeq PSL_2(7)$ будем считать, что $q > 2$. Группа $PSL_3(q)$ имеет максимальную подгруппу Бореля индекса $\dfrac{q^3-1}{q-1} = q^2+q+1$.

Если $q = 3t+1$ $(q-1 = 3t)$, то

$$q^2+q+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3).$$

Поэтому $q = 3t+2$ и $q+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$. Из таблиц 8.3, 8.4 [15] следует, что если $q+1 = 3m$, где $(m, 3) = 1$, то все максимальные подгруппы в $PSL_3(q)$ имеют индекс, взаимно простой с числом 3. В частности, это группы $PSL_3(5)$, $PSL_3(11)$ и $PSL_3(23)$. Если $(m, 3) = 1$, то в $PSL_3(q)$ найдется максимальная подгруппа, индекс которой делится на 3. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guralnick*, *R.* Subgroups of prime power index in a simple group / R. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81, № 2. – P. 304–311.

2. *Казарин*, *Л.С.* О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.

3. *Liebeck*, *M.W.* The primitive permutation groups of odd degree / M.W. Liebeck, J. Saxl // J. London Math. Soc. – 1985. – Vol. 31, № 2. – P. 250–264.

4. *Kantor*, *W.M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes / W.M. Kantor // J. Algebra. – 1987. – Vol. 106, № 1. – P. 15–45.

5. *Маслова*, *Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах / Н.В. Маслова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2008. – Т. 14, № 4. – С. 100–118.

6. *Maslova*, *N.V.* Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups / N.V. Maslova // Siberian Electron. Math. Reports. – 2018. – Vol. 15. – P. 707–718.

7. *Маслова*, *Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем / Н.В. Маслова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 182–184.

8. *Каморников*, *С.Ф.* Конечные простые группы, все максимальные подгруппы которых имеют нечетный индекс / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 71–74.

9. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

10. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

11. *Seitz*, *G.M.* Flag-transitive subgroups of Chevalley groups / G.M. Seitz // Ann. Math. – 1973. – Vol. 97, № 1. – P. 27–56.

12. *Тютянов*, *В.Н.* Тройные факторизации в конечных группах / В.Н. Тютянов, Л.А. Шеметков // Доклады НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 52–55.

13. *Liebeck*, *M.W.* A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups / M.W. Liebeck, C.E. Prager, J. Saxl // J. Algebra. – 1987. – Vol. 111, № 2. – P. 365–383.

14. *Wilson*, *R.A.* The finite simple groups / R.A. Wilson. – Springer: Graduate texts in mathematics 251, 2009. – 298 p.

15. *Bray*, *J.N.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups / J.N. Bray, D.F. Holt, C.M. Roney-Dougal. – Cambridge University Press: London Math. Soc. Lecture Note Series 407, 2013. – 454 p.

Исследования С.Ф. Каморникова выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*грант ГР* № 20191056).

Поступила в редакцию 03.06.2020.