

УДК 517.162

 $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ГЁЛЬДЕРА, МИНКОВСКОГО И МЮРХЕДА**С.М. Горский¹, В.И. Мурашко²**¹Санкт-Петербургский Академический университет²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины **$\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -CONVEX FUNCTIONS AND GENERALIZATION OF THE HÖLDER, MINKOWSKI, AND MUIRHEAD INEQUALITIES****S.M. Gorsky¹, V.I. Murashka²**¹Saint Petersburg Academic University²F. Scorina Gomel State University

Через $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ будем обозначать произвольные средние величины, а через $\mathfrak{H}_p$ – среднее степенное степени p . Функция f называется $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклой, если для любых x и y из области определения функции f выполняется неравенство $f(\mathfrak{M}(x, y)) \leq \mathfrak{N}(f(x), f(y))$. В работе предложен метод построения $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -выпуклых функций. Также получены обобщения неравенств Коши – Буняковского, Гёльдера, Минковского, Малера и Мюрхеда.

Ключевые слова: $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклая функция, неравенство Коши – Буняковского, неравенство Гёльдера, неравенство Минковского, неравенство Малера, неравенство Мюрхеда, среднее Гёльдера.

Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ be any means. Let $\mathfrak{H}_p$ be a power mean with exponent p . A function f is called $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -convex if for any x and y from the domain of f the inequality $f(\mathfrak{M}(x, y)) \leq \mathfrak{N}(f(x), f(y))$ holds. In this paper the method of constructing $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -convex functions is proposed. For such functions generalizations of Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski, Mahler, and Muirhead inequalities are obtained.

Keywords: $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -convex function, Cauchy-Schwarz inequality, Hölder inequality, Minkowski inequality, Mahler inequality, Muirhead inequality, Hölder mean.

Введение

Данная работа по сути продолжает работу [1], в которой были получены аналоги неравенств Эрмита – Адамара, Поповичу, Чебышева и перестановочного неравенства для $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклых функций. Напомним основные определения и используемые результаты.

Определение 0.1. Средней величиной $\mathfrak{M}$ набора $a_1, \dots, a_n$ называется величина, для которой выполнено условие

$$\min\{a_1, \dots, a_n\} \leq \mathfrak{M}(a_1, \dots, a_n) \leq \max\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Часто рассматриваются средние с дополнительным условием симметричности

$$\mathfrak{M}(a_1, \dots, a_n) = \mathfrak{M}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}),$$

где σ – произвольная перестановка чисел от 1 до n .

Наиболее употребляемым средними являются среднее Гёльдера (среднее степенное)

$$\mathfrak{H}_p(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p}, & p \neq 0; \\ \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, & p = 0; \end{cases}$$

и среднее Колмогорова (квази-арифметическое среднее)

$$\mathfrak{K}_\varphi(a_1, \dots, a_n) = \varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_n)}{n} \right),$$

где φ – монотонная функция.

Определение 0.2 [2]. Функция f называется $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклой функцией, если для любых x и y из области определения функции f выполняется неравенство

$$f(\mathfrak{M}(x, y)) \leq \mathfrak{N}(f(x), f(y)),$$

где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – средние величины.

В случае, если предыдущее неравенство выполняется с обратным знаком, то функция f называется $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -вогнутой функцией.

Очевидно, что выпуклая функция является $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_1$ -выпуклой функцией. С другой стороны, нетрудно показать, что непрерывная $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_1$ -выпуклая функция является выпуклой.

Целью данной работы является описание в явном виде $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -выпуклых функций, а также обобщение неравенств Мюрхеда, Гёльдера, Минковского, Малера и Коши – Буняковского.

Замечание. В силу неравенства о средних любая $\mathfrak{M}\mathfrak{H}_q$ -выпуклая функция является

$\mathfrak{M}\mathfrak{H}_s$ -выпуклой функцией при $s > q$. Обратное неверно. Например, $f(x) = e^x$ является $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_0$ -выпуклой функцией, но не является $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_{-1}$ -выпуклой функцией.

1 Получение $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -выпуклых функций в явном виде

Хорошо известен следующий общий критерий для $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклости (см., например, [1]):

Лемма 1.1. Пусть ψ и φ – строго монотонные функции, определенные на интервалах J и I соответственно, ψ – возрастающая (убывающая) и $f: I \rightarrow J$ – непрерывная функция. Тогда и только тогда f есть $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция, когда $\psi(f(\varphi^{-1}(t)))$ выпукла (вогнута) на $\varphi(I)$.

Из леммы 1.1 следует следующий критерий $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -выпуклости.

Лемма 1.2 [3]. Дифференцируемая функция $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ есть $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -выпуклая тогда и только тогда, когда $x^{1-p}f'(x)f^{q-1}(x)$ есть возрастающая функция.

Теорема 1.1. Пусть $f: I \rightarrow J$ ($I, J \subseteq (0; +\infty)$) – дифференцируемая $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -выпуклая функция, тогда f представима в следующем виде

$$f(x) = \begin{cases} \left(q \int_{x_0}^x s^{p-1} C_1(s) ds + C_2 \right)^{\frac{1}{q}}, & q \neq 0; \\ C_2 \exp \left(\int_{x_0}^x s^{p-1} C_1(s) ds \right), & q = 0; \end{cases} \quad (1.1)$$

где $C_1(s)$ – произвольная подходящая непрерывная возрастающая функция, а C_2 – константа.

Обратно, пусть $C_1(s)$ – непрерывная возрастающая функция, а C_2 – константа. Если функция f , заданная формулой (1.1) определена на некотором интервале $(x_0; x_1)$, то она является $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$ -выпуклой на нём.

Доказательство. По лемме 1.2

$$C_1(x) = x^{1-p} f'(x) f^{q-1}(x) \quad (1.2)$$

есть возрастающая функция. Будем считать, что функция $C_1(x)$ известна и рассмотрим (1.2) как дифференциальное уравнение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$x^{p-1} C_1(x) dx = f^{q-1} df.$$

Решив которое и получим (1.1). $\square$

Пример 1.1. Полагая в предыдущей теореме $x_0 = 1$, $C_1(s) = r > 0$ и $C_2 > 0$ получим, что функция $f(x) = C_2 x^r$ является $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$ -выпуклой.

Если же положить $x_0 = 0$, $C_1(s) = s \cdot \operatorname{arctg} s$ и

$$C_2 > 0, \text{ то получим, что функция } f(x) = \frac{e^{x \cdot \operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

также является $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$ -выпуклой.

Пример 1.2. Полагая в предыдущей теореме $x_0 = 0$, $C_2 = 0$, $C_1(s) = r s^{r-1}$ и $r \geq 1$, получим, что функция $f(x) = x^r$ является $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1$ -выпуклой. Второй пример $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1$ -выпуклой функции $f(x) = x^2 + \sin x$ можно получить взяв $C_1(s) = 2s + \cos s$ и $x_0 = 0$, $C_2 = 0$.

Пример 1.3. Из леммы 1.1 следует, что если ψ , φ и f – дифференцируемые функции, то

$$C_1(x) = \psi'(f(\varphi^{-1}(x))) f'(\varphi^{-1}(x)) (\varphi^{-1})'(x) \quad (1.3)$$

есть возрастающая (убывающая) функция, если ψ есть строго возрастающая (строго убывающая). Положим, что $\varphi(x) = x$. Тогда решив (1.3) как дифференциальное уравнение относительно функции f получим, что

$$f(x) = \psi^{-1} \left(\int_{x_0}^x C_1(s) ds + C_2 \right)$$

есть $\mathfrak{H}_1\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция.

Выбрав конкретные строго монотонные дифференцируемые функции ψ и φ и решив уравнение (1.3) получим $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклую функцию.

Замечание 1.1. Лемма 1.1 предлагает следующий способ построения $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклой функции f . Если взять строго возрастающую функцию ψ , выбрать произвольную выпуклую функцию C и в равенстве $\psi(f(\varphi^{-1}(t))) = C(t)$ произвести замену $t = \varphi(x)$, а затем и к обеим частям неравенства применить функцию ψ^{-1} , тогда получим, что $f(x) = \psi^{-1}(C(\varphi(x)))$.

2 Обобщение некоторых классических неравенств

2.1. Обобщение неравенств Гёльдера и Коши – Буняковского

Теорема 2.1. Пусть $f: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ является непрерывной $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$ -выпуклой функцией, a_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) – положительные числа, а числа $p_j > 1$ ($1 \leq j \leq m$) такие, что $\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} = 1$.

Тогда для функции f справедливо неравенство:

$$\prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f(a_{ij}) \right)^{\frac{1}{p_j}} \geq \sum_{i=1}^n f \left(\prod_{j=1}^m a_{ij}^{\frac{1}{p_j}} \right).$$

Доказательство. Из леммы 1.1 напрямую следует, что $g(x) = \ln f(e^x)$ есть выпуклая

функция, а, значит для неё справедливо неравенство Йенсена, откуда следует справедливость следующего неравенства для положительных x_j ($1 \leq j \leq m$)

$$\prod_{j=1}^m f^{\frac{1}{p_j}}(x_j) \geq f\left(\prod_{j=1}^m x_j^{\frac{1}{p_j}}\right). \quad (2.1)$$

Пусть $A_j = \left(\sum_{i=1}^n f(a_{ij})\right)^{\frac{1}{p_j}}$. К сумме $\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j} \cdot \frac{f(a_{ij})}{A_j^{p_j}}\right)$ применим неравенство Юнга и получим:

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j} \cdot \frac{f(a_{ij})}{A_j^{p_j}}\right) \geq \frac{\prod_{j=1}^m f^{\frac{1}{p_j}}(a_{ij})}{\prod_{j=1}^m A_j}.$$

К числителю дроби из правой части предыдущего неравенства применим неравенство (2.1) и получим

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j} \cdot \frac{f(a_{ij})}{A_j^{p_j}}\right) \geq \frac{f\left(\prod_{j=1}^m a_{ij}^{\frac{1}{p_j}}\right)}{\prod_{j=1}^m A_j}.$$

Суммируя последнее неравенство по $1 \leq i \leq n$ получаем требуемое неравенство. $\square$

Замечание 2.1. Так как $f(x) = x^2$ является $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_0$ -выпуклой функцией, то при $m = 2$, $p_1 = p_2 = 2$ в качестве следствия мы получаем неравенство Коши – Буняковского. Поэтому при $m = 2$ и $p_1 = p_2 = 2$ неравенство из теоремы (2.1) является обобщением неравенства Коши – Буняковского:

$$\left(\sum_{i=1}^n f(a_i)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n f(b_i)\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sum_{i=1}^n f(\sqrt{a_i b_i}), \quad (2.2)$$

а при $m = 2$ является обобщением классического неравенства Гёльдера для сумм:

$$\left(\sum_{i=1}^n f(a_i)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n f(b_i)\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n f(a_i^{\frac{1}{p}} b_i^{\frac{1}{q}}).$$

Замечание 2.2. Если в тождестве Лагранжа:

$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2$ положить $x_i = \sqrt{f(a_i)}$, $y_i = \sqrt{f(b_i)}$, где f – $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_0$ -выпуклая функция, то получим уточнение неравенства (2.2):

$$\left(\sum_{i=1}^n f(a_i)\right) \left(\sum_{i=1}^n f(b_i)\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n f(\sqrt{a_i b_i})\right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left(\sqrt{f(a_i) f(b_j)} - \sqrt{f(a_j) f(b_i)}\right)^2.$$

Нам потребуется следующее хорошо известное определение.

Определение 2.1. Функция $f: I \rightarrow J$ называется полуаддитивной (супераддитивной), если для любых $x, y \in I$ выполняется

$$f(x+y) \leq (\geq) f(x) + f(y).$$

Лемма 2.1. Пусть $q \geq 1$ и $g: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ – непрерывная $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_q$ -вогнутая функция, для которой $g(0) \geq 0$. Тогда функция g является полуаддитивной.

Доказательство. Будем считать, что $0^q = 0$. Рассмотрим произвольное $\lambda \in [0; 1]$. Тогда в силу леммы 1.1, непрерывности и $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_q$ -вогнутости функции g имеем

$$\begin{aligned} g(\lambda x) &= g(\lambda x + (1-\lambda)0) \geq \\ &\geq (\lambda g^q(x) + (1-\lambda)g^q(0))^{\frac{1}{q}} \geq \\ &\geq (\lambda g^q(x) + (1-\lambda)0)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{\frac{1}{q}} g(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} g(x) + g(y) &= g\left(\frac{x}{x+y}(x+y)\right) + g\left(\frac{y}{x+y}(x+y)\right) \geq \\ &\geq \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}} g(x+y) + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}} g(x+y) = \\ &= g(x+y) \left(\left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \geq \end{aligned}$$

[по классическому неравенству Минковского]

$$\geq g(x+y) \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}} = g(x+y),$$

что и доказывает полуаддитивность. $\square$

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2.2. Пусть $0 < q \leq 1$ и $g: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ – непрерывная $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_q$ -выпуклая функция, для которой $g(0) = 0$. Тогда функция g является супераддитивной.

Как известно, из неравенства Гёльдера можно получить следующее неравенство.

Теорема 2.2. Для положительных b_i , неотрицательных a_i ($1 \leq i \leq n$) и $m > 0$, $r \geq 1$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1^{m+r}}{b_1^m} + \dots + \frac{a_n^{m+r}}{b_n^m} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^{m+r}}{n^{r-1} (b_1 + \dots + b_n)^m}. \quad (2.3)$$

Следующие две теоремы обобщают предыдущую теорему.

Теорема 2.3. Пусть $m > 0$, $r \geq 1$ и $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ такие, что $f^{\frac{1}{m+r}}$ – полуаддитивная и $g^{\frac{1}{m}}$ – супераддитивная функции. Тогда для наборов a_i и b_i ($1 \leq i \leq n$) верно неравенство:

$$\frac{f(a_1)}{g(b_1)} + \dots + \frac{f(a_n)}{g(b_n)} \geq \frac{f(a_1 + \dots + a_n)}{n^{r-1}g(b_1 + \dots + b_n)}.$$

Доказательство. Пусть $F(x) = f^{\frac{1}{m+r}}(x)$, и $G(x) = g^{\frac{1}{m}}(x)$. В силу неравенства (2.3) верно

$$\begin{aligned} \frac{F^{m+r}(a_1)}{G^m(b_1)} + \dots + \frac{F^{m+r}(a_n)}{G^m(b_n)} &\geq \\ &\geq \frac{(F(a_1) + \dots + F(a_n))^{m+r}}{n^{r-1}(G(b_1) + \dots + G(b_n))^m}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как F – полуаддитивная, а G – супераддитивная:

$$\begin{aligned} \frac{(F(a_1) + \dots + F(a_n))^{m+r}}{n^{r-1}(G(b_1) + \dots + G(b_n))^m} &\geq \\ &\geq \frac{F^{m+r}(a_1 + \dots + a_n)}{n^{r-1}G^m(b_1 + \dots + b_n)} = \frac{f(a_1 + \dots + a_n)}{n^{r-1}g(b_1 + \dots + b_n)}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 2.4. Пусть $\Omega, \mathfrak{R}$ – произвольные средние величины. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ есть $\mathfrak{H}_{\frac{1}{m+r}} \Omega$ -выпуклая и $g: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ $\mathfrak{H}_{\frac{1}{m}} \mathfrak{R}$ -вогнутая и $m > 0, r \geq 1$. Тогда для наборов a_i и b_i ($1 \leq i \leq n$) верно неравенство:

$$\frac{1}{n} \left(\frac{f(a_1)}{g(b_1)} + \dots + \frac{f(a_n)}{g(b_n)} \right) \geq \frac{f(\Omega(a_1, \dots, a_n))}{g(\mathfrak{R}(b_1, \dots, b_n))}.$$

Доказательство. Числитель и знаменатель дроби из правой части неравенства (2.4) умножим на $n^{-(m+r)}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{n^{-(m+r)}(F(a_1) + \dots + F(a_n))^{m+r}}{n^{-(m+r)}n^{r-1}(G(b_1) + \dots + G(b_n))^m} &= \\ = \frac{\left(\frac{F(a_1) + \dots + F(a_n)}{n} \right)^{m+r}}{n^{-1} \left(\frac{G(b_1) + \dots + G(b_n)}{n} \right)^m} &= \\ = \frac{\mathfrak{H}_{\frac{1}{m+r}}(f(a_1), \dots, f(a_n))}{n \cdot \frac{\mathfrak{H}_{\frac{1}{m}}(g(b_1), \dots, g(b_n))}{n}}. \end{aligned}$$

Разделив на n обе части неравенства (2.4) и применив свойства функций f и g , получим требуемое. $\square$

2.2 Обобщение неравенств Минковского и Малера

Теорема 2.5. Пусть $p \geq 1$ и $f: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ есть полуаддитивная $\mathfrak{H}_p \mathfrak{M}$ -вогнутая функция и пусть a_{ij} ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) – положительные числа. Тогда для функции f справедливо неравенство

$$\mathfrak{H}_p \left(f \left(\sum_{j=1}^m a_{1j} \right), \dots, f \left(\sum_{j=1}^m a_{nj} \right) \right) \leq \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{M}(a_{i1}, \dots, a_{im})).$$

Доказательство. Воспользуемся доказательством классического неравенства Минковского для сумм. Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f^p \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) &= \sum_{i=1}^n f \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) f^{p-1} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) \leq \\ &[\text{применим полуаддитивность}] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(a_{ij}) f^{p-1} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(a_{ij}) f^{p-1} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) \leq \end{aligned}$$

[правую часть этого неравенства оценим с помощью классического неравенства Гёльдера]

$$\leq \sum_{j=1}^m \left(\left(\sum_{i=1}^n f^p(a_{ij}) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n f^p \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) \right)^{\frac{p-1}{p}} \right).$$

Сокращаем обе части неравенства на

$$n^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n f^p \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_p \left(f \left(\sum_{j=1}^m a_{1j} \right), \dots, f \left(\sum_{j=1}^m a_{nj} \right) \right) &\leq \\ &\leq \sum_{j=1}^m \mathfrak{H}_p(f(a_{1j}), \dots, f(a_{nj})). \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться $\mathfrak{H}_p \mathfrak{M}$ -вогнутостью и получим требуемое неравенство. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $f: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ и $q \geq 1$ есть непрерывная $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_q$ -вогнутая функция и пусть a_{ij} ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) – положительные числа. Тогда для функции f справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n f \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) \leq n \cdot \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{H}_q(a_{i1}, \dots, a_{im})).$$

Следствие 2.2. Пусть $f: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ – $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_q$ -вогнутая функция ($q \geq 1$). Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{q}-1} \left(f^q \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) + f^q \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) \right)^{\frac{1}{q}} &\geq \\ &\geq f \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) + f \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^q(a_i) \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^q(b_i) \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^q(a_i + b_i) \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Третье неравенство верно в силу леммы 2.1 и теоремы 2.5.

Второе неравенство верно в силу определения $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_q$ -вогнутой функции.

Первое неравенство верно в силу неравенства о средних. $\square$

Теорема 2.6. Пусть $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ есть непрерывная супераддитивная функция, и пусть a_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) – положительные числа. Тогда для функции f справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m f^{\frac{1}{m}}(a_{ij}) \leq \prod_{j=1}^m f^{\frac{1}{m}}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right).$$

Доказательство. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{f(a_{ij})}{\sum_{i=1}^n f(a_{ij})} \right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{f(a_{ij})}{\sum_{i=1}^n f(a_{ij})}.$$

Просуммировав предыдущее неравенство по i и умножив обе части неравенства на

$$\prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f(a_{ij}) \right)^{\frac{1}{m}}$$

получим

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m f^{\frac{1}{m}}(a_{ij}) \leq \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f(a_{ij}) \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Осталось воспользоваться супераддитивностью функции f . $\square$

Замечание 2.3. Если в предыдущей теореме положить, что $f(x) = x$ и $n = 2$, то получится неравенство Малера:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n y_i} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)}.$$

2.3 Обобщение неравенства Мюрхеда

Напомним некоторые определения и теоремы.

Определение 2.2. Будем говорить, что набор $a(a_1, \dots, a_n)$ мажорирует набор $b(b_1, \dots, b_n)$ и записывать $a \succ b$, если

1. $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$;
2. $\forall k$ ($1 \leq k \leq n-1$) $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$;
3. $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$.

Пусть $x \succ y$, тогда для выпуклой функции f справедливо неравенство Караматы [6, теорема 2.9]

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i).$$

Из леммы 1.1 непосредственно следует следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Если f – непрерывная

$\mathfrak{K}_\varphi, \mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция и

$$(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \succ (\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)),$$

то $\mathfrak{K}_\psi(f(a_1), \dots, f(a_n)) \geq \mathfrak{K}_\psi(f(b_1), \dots, f(b_n))$.

Доказательство. По лемме 1.1 функция $\psi(f(\varphi^{-1}(x)))$ является выпуклой (вогнутой). Положим, $x_i = \varphi(a_i)$, $y_i = \varphi(b_i)$. Если $x \succ y$, то по неравенству Караматы имеем

$$\sum_{i=1}^n \psi(f(a_i)) \geq (\leq) \sum_{i=1}^n \psi(f(b_i)).$$

Разделив обе части неравенства на n и применив к обеим частям ψ^{-1} , получим требуемое. $\square$

Пример 2.1. Так как $f(x) = x$ является $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_q$ -выпуклой функцией при $q \geq 1$, то для наборов положительных чисел $x \succ y$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

что доказывает, что $\mathfrak{H}_q$ ($q > 1$) является выпуклой по Шуру функцией.

Теорема 2.7. Пусть $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ – непрерывная $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1$ -выпуклая функция, и пусть

$$(a_1, \dots, a_n) \succ (b_1, \dots, b_n).$$

Тогда для положительных x_i ($1 \leq i \leq n$) выполняется неравенство

$$\sum_{\pi} f\left(\prod_{i=1}^n x_{\pi(i)}^{a_i}\right) \geq \sum_{\pi} f\left(\prod_{i=1}^n x_{\pi(i)}^{b_i}\right), \quad (2.5)$$

где суммирование ведется по всем возможным перестановкам π степени n .

Доказательство. Как известно [6, с. 11], если $a \succ b$, то за конечное число операций вида: пару (a_i, a_j) ($a_j < a_i$) заменить на пару $(a_i - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$ для какого-то $\varepsilon \in (0; a_i - a_j)$ из a можно получить b .

Понятно, что теми же операциями из которых из $a(a_1, \dots, a_n)$ можно получить $b(b_1, \dots, b_n)$ ($a \succ b$) для положительных $y_1, \dots, y_n$ из

$$\{a_1 y_{\pi(1)} + \dots + a_n y_{\pi(n)}\} \quad (2.6)$$

можно получить

$$\{b_1 y_{\pi(1)} + \dots + b_n y_{\pi(n)}\}, \quad (2.7)$$

где последовательности построены по всевозможным перестановкам π чисел от 1 до n . То есть в наборах (2.6) и (2.7) можно переставить элементы так, чтобы (2.6) $\succ$ (2.7). Положим, что $y_i = \ln x_i$ и применим к (2.6) и (2.7) для функции g неравенство Караматы, что и доказывает неравенство (2.5). $\square$

Неравенство (2.5) является обобщением неравенства Мюрхеда, когда $f(x) = x$.

Следствие 2.3. Пусть $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ – возрастающая непрерывная $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1$ -выпуклая функция, числа $\alpha_i \geq 0$ такие, что $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Тогда для положительных x_i ($1 \leq i \leq n$) справедливо неравенство

$$\mathfrak{K}_f(x_1, \dots, x_n) \geq f^{-1} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\pi} f(x_{\pi(1)}^{\alpha_1} \dots x_{\pi(n)}^{\alpha_n}) \right) \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

где π – перестановка чисел от 1 до n .

Доказательство. К наборам

$$(1, 0, \dots, 0) \succ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \succ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

применим теорему 2.7. Все части неравенства разделим на $n!$ и ко всем частям неравенства применим функцию f^{-1} . $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мурашко, В.И. $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклые функции и обобщения классических неравенств / В.И. Мурашко, С.М. Горский, Я.И. Сандрыгайло //

Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 98–102.

2. Niculescu, C.P. Convexity according to means / C.P. Niculescu // J. Math. Ineq. Appl. – 2003. – Vol. 6, № 4. – P. 571–579.

3. Baricz, Á. Geometrically concave univariate distributions / Á. Baricz // J. Math. Ineq. Appl. – 2010. – № 363. – P. 182–196.

4. Anderson, G.D. Generalized convexity and inequalities / M.K. Vamanamurthy, M. Vuorinen // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 335. – P. 1294–1308.

5. Li, Y. A note of proofs of generalized Radon inequality / Y. Li, X.-M. Gu, J. Xiao // arXiv: 1504.05874v3.

6. Arnold, B.C. Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction / B.C. Arnold // Springer-Verlag Lecture Notes in Statistics. – 1987. – Vol. 43.

Поступила в редакцию 11.02.2020.