Проблемы физики, математики и техники, № 2 (43), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОБОБЩЕННО АБНОРМАЛЬНЫХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON PRODUCTS OF GENERALIZED ABNORMAL SUPERSOLUBLE SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

A.F. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University

Введено и изучено понятие X-абнормальной подгруппы конечных групп. Установлено несколько признаков сверхразрешимости конечных групп в терминах произведений X-абнормальных подгрупп. В частности, доказана сверхразрешимость группы $G = AB = CD$, где A и B – субнормальные сверхразрешимые, а C и D – X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы G.

Ключевые слова: *конечная группа*, *сверхразрешимая группа*, *абнормальная подгруппа*, *X-абнормальная подгруппа*.

The concept of an X-abnormal subgroup of finite groups is introduced and studied. Several attributes of the supersolubility of finite groups in terms of products of X-abnormal subgroups are established. In particular, the supersolubility of the group $G = AB = CD$ is proved, where A and B are subnormal, and C and D are X-abnormal supersoluble subgroups in G.

Keywords: *finite group*, *supersoluble subgroup*, *abnormal subgroup*, *X-abnormal subgroup*.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются стандартные определения и обозначения [1], [2].

Хорошо известно, что произведение двух сверхразрешимых (нормальных) подгрупп группы G не обязательно сверхразрешимо. В 1957 году Бэр [3] доказал, что, если группа $G = AB$, где A и B – нормальные сверхразрешимые подгруппы G и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима. Этот результат послужил отправной точкой для появления многочисленных исследований (см. например, [4]–[13]), посвященных нахождению признаков и критериев сверхразрешимости групп в терминах произведений нормальных и обобщенно нормальных сверхразрешимых подгрупп.

Полярным к понятию нормальности является понятие абнормальности для подгрупп. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется абнормальной в G, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. Обозначается $H \ abn\ G$.

Имеется целый ряд обобщений абнормальности для подгрупп. Хорошо известны и применяются понятия самонормализуемой, субабнормальной, слабо абнормальной, контранормальной и др. подгрупп.

Во многих случаях возникает факторизация группы абнормальными подгруппами. Например, симметрическая группа S_4 представима в произведение своих абнормальных подгрупп: силовской 2-подгруппы и подгруппы, изоморфной S_3. В работах [14], [15] в классе разрешимых групп исследовались классы групп $\mathfrak{X}$, замкнутые относительно взятия произведений абнормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. В частности, было получено описание всех разрешимых наследственных насыщенных формаций и разрешимых формаций Фитинга с данным выше свойством. Отметим, что класс всех сверхразрешмых групп, являясь наследственной насыщенной формацией, не попадает в список формаций, полученных в работе [14]. На это также указывает и приведенный выше пример. Поэтому возникает естественная задача: исследовать, при каких условиях произведение ненормальных (абнормальных) сверхразрешимых подгрупп сверхразрешимо? Рассмотрению ряда случаев этой общей задачи и посвящена настоящая работа.

1 Предварительные сведения

***Лемма* 1.1.** *Пусть H и R – подгруппы группы G, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $H\ abn\ R$, то $HN / N\ abn\ RN / N$*;

2) *если $N \subseteq H$ и $H / N\ abn\ G / N$, то $H\ abn\ G$.*

Доказательство. Установим справедливость 1). Пусть $H\ abn\ R$. Для любого $xN \in RN / N$ найдутся $w \in R$ и $n \in N$ такие, что $x = wn$. Тогда

$$xN = wN \in \langle H, H^w \rangle N / N =$$
$$= \langle HN / N, H^w N / N \rangle = \langle HN / N, (HN / N)^{xN} \rangle.$$

Таким образом, $HN/N \ abn \ RN/N$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Для любого $x \in G$ ввиду абнормальности H/N в G/N получаем, что $xN \in \langle H/N, (H/N)^{xN} \rangle = \langle H, H^x \rangle / N$. Отсюда следует, что найдутся элементы $h \in \langle H, H^x \rangle$ и $n \in N$ такие, что $x = hn$. Тогда

$$x \in \langle H, H^x \rangle N = \langle H, H^x \rangle. \qquad \square$$

Пусть p – простое число. Напомним [16, с. 6], что группа G называется строго p-замкнутой, если силовская p-подгруппа G_p группы G нормальна в G и G/G_p является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Нам потребуется следующая известная теорема Бэра [16, теорема 1.12].

***Теорема* 1.2.** *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда*

(*a*) *G является дисперсивной по Оре, и*

(*b*) $N_G(G_p)/C_G(G_p)$ *является строго p-замкнутой для любой силовской p-подгруппы* G_p *группы G и любого* $p \in \pi(G)$.

Отметим следующие свойства класса всех сверхразрешимых групп (см., например, [1, гл. 1, § 4.9], [16, гл. 1]).

***Теорема* 1.3.** *Класс всех сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию, которая имеет локальный экран f такой, что* $f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$ *для любого простого p, где* $\mathfrak{A}(p-1)$ *– формация всех абелевых групп экспоненты, делящей* $p-1$.

2 Обобщенно абнормальные подгруппы конечных групп

В настоящем разделе рассмотрим некоторые обобщения понятия абнормальной подгруппы.

В работе [17] Роуз ввел следующее обобщение абнормальной подгруппы.

***Определение* 2.1.** Подгруппа H группы G называется контранормальной в G, если $H^G = G$. Будем использовать обозначение $H \ cn \ G$.

Свойства контранормальных подгрупп собраны в следующей лемме.

***Лемма* 2.2.** *Пусть H и R – подгруппы группы G,* $N \trianglelefteq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $H \ cn \ R$, *то* $HN/N \ cn \ RN/N$, *в частности, если* $H \ cn \ G$, *то* $HN/N \ cn \ G/N$;

2) *если* $N \subseteq H$ *и* $H/N \ cn \ G/N$, *то* $H \ cn \ G$;

3) *если* $H \ cn \ R$, $R \ cn \ G$, *то* $H \ cn \ G$;

4) *если* $H \ abn \ G$, *то* $H \ cn \ G$.

Доказательство. Установим справедливость 1). Пусть $H \ cn \ R$. Тогда $H^R N/N = RN/N \supseteq (HN/N)^{RN/N}$. Обозначим $(HN/N)^{RN/N} = K/N$. Пусть $x \in R$. Тогда $xN \in RN/N$ и $(HN/N)^{xN} \subseteq K/N$. Поэтому $H^x \subseteq H^x N \subseteq K$ для любого $x \in R$. Отсюда следует, что $H^R \subseteq K$ и $H^R N/N \subseteq K/N$. Итак,

$$H^R N/N = RN/N = (HN/N)^{RN/N},$$

т. е. $HN/N \ cn \ RN/N$.

Если рассмотреть $R = G$, то

$$HN/N \ cn \ G/N$$

и утверждение 1) доказано.

Установим справедливость 2). Пусть $N \subseteq H$ и $H/N \ cn \ G/N$. Тогда

$$G/N = (H/N)^{G/N} = \langle (H/N)^{xN} \mid \text{для любого } xN \in G/N \rangle.$$

Так как $(H/N)^{xN} = H^x/N \subseteq H^G/N$, получаем $(H/N)^{G/N} \subseteq H^G/N \subseteq G/N = (H/N)^{G/N}$. Таким образом, $(H/N)^{G/N} = H^G/N = G/N$ и $H^G = G$. Это означает, что $H \ cn \ G$. Утверждение 2) доказано.

Установим справедливость 3). Пусть $H \ cn \ R \ cn \ G$. Из $H^R = R$ для любого $g \in G$ следует, что $R^g = \langle H^x \mid \text{для всех } x \in R \rangle^g = \langle H^{xg} \mid \text{для всех } x \in R \rangle$. Тогда $G = R^G = \langle R^g \mid \text{для всех } g \in G \rangle = \langle H^{xg} \mid \text{для всех } x \in R \text{ и всех } g \in G \rangle = H^G$. Утверждение 3) доказано.

Утверждение 4) следует из того, что всякая подгруппа, содержащая абнормальную подгруппу, самонормализуема. $\square$

Заметим, что обратное утверждение к 4) леммы 2.2 неверно, на что указывает пример подгруппы $H = \langle (1,2) \rangle$ в симметрической группе S_4.

Рассмотрим еще одно обобщение абнормальности и контранормальности, основанное на одной идее обобщения нормальности, предложенной А. Манном в [18]. Функторное развитие результатов [18] можно найти в работах [19], [20].

***Определение* 2.3.** Подгруппу H группы G будем называть X-абнормальной в G, если для любого эпиморфизма σ группы G либо $H^\sigma = G^\sigma$, либо H^σ содержится в собственной абнормальной подгруппе R^σ группы G^σ.

***Лемма* 2.4.** *Пусть H – подгруппа группы G и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H X-абнормальна в G, то* HN/N *X-абнормальна в* G/N;

2) *если* $N \subseteq H$ *и* H/N *X-абнормальна в* G/N, *то H X-абнормальна в G.*

Доказательство следует из работы [19].

***Лемма* 2.5.** *Пусть H – подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H контранормальна и субнормальна в G одновременно*, *то* $H = G$;

2) *если G – разрешимая группа и H X-абнормальна и субнормальна в G одновременно*, *то* $H = G$.

Доказательство. Установим справедливость 1). Пусть $H\ cn\ G$. Если $H \neq G$, то в G найдется нормальная подгруппа $K \neq G$, содержащая *H*. Тогда для любого $x \in G$ подгруппа $H^x \subseteq K^x = K$. Поэтому $H^G \subseteq K$. Получили противоречие с $H^G = G$. Значит, $H = G$. Утверждение 1) доказано.

Установим справедливость 2). Оставаясь в предположениях 2) леммы, допустим, что $H \neq G$. Так как *H* субнормальна в *G*, то найдется нормальная максимальная подгруппа группы *G* такая, что $H \subseteq M$. Тогда HM / M является *X*-абнормальной и субнормальной в G / M одновременно. Так как G / M – группа простого порядка и не содержит собственных абнормальных подгрупп, то получаем противоречие. □

***Лемма* 2.6.** Если $G = AB$, где A и B – *X*-абнормальные нильпотентные подгруппы группы *G*, то *G* нильпотентна.

Доказательство. Пусть группа *G* – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Тогда $G = H_1 H_2$, где H_i – *X*-абнормальная нильпотентная подгруппа группы *G*, $i = 1, 2$, но *G* ненильпотентна. По теореме Виландта – Кегеля *G* разрешима. Пусть *N* – минимальная нормальная подгруппа группы *G*. Для факторгруппы G / N все условия леммы выполняются. Поэтому G / N нильпотентна для любой минимальной нормальной подгруппы *N* группы *G*.

Так как класс всех нильпотентных групп образует насыщенную формацию, заключаем, что *N* – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе *G* и $\Phi(G) = 1$. При этом $N = C_G(N) = F(G)$ является *p*-группой, *p* – некоторое простое число. В *G* имеется максимальная подгруппа *M*, для которой $G = [N]M$, при этом $M \cong G / N$ нильпотентна.

Рассмотрим подгруппу $H_i N$, где $i = 1, 2$. Если $H_i N = G$, где $i = 1, 2$, то H_i – максимальная подгруппа группы *G*. Так как все дополнения к *N* являются максимальными подгруппами в *G* и сопряжены в ней, то по теореме Оре следует, что этот случай невозможен. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $H_1 N \neq G$. Тогда $H_1 N / N$ является собственной подгруппой нильпотентной группы G / N. Но тогда $H_1 N / N$ является одновременно субнормальной и *X*-абнормальной подгруппой в G / N. По лемме 2.5 получаем, что $H_1 N / N = G / N$. Это противоречит с $H_1 N \neq G$. □

Связь контранормальных и *X*-абнормальных подгрупп устанавливает

***Лемма* 2.7.** *Справедливы следующие утверждения*.

(1) *В любой группе всякая контранормальная подгруппа является X-абнормальной.*

(2) *Пусть G – разрешимая группа. Тогда и только тогда подгруппа H является контранормальной в G*, *когда подгруппа H является X-абнормальной в G*.

Доказательство. Установим справедливость (1). Пусть подгруппа *H* является контранормальной подгруппой в группе *G*. Если *G* – простая группа, то при $H \neq G$ в *G* найдется максимальная подгруппа *W*, содержащая *H*. Так как W абнормальна в *G*, получаем *X*-абнормальность *H* в *G*.

Допустим, что *G* непроста. Рассмотрим любой эпиморфизм σ группы *G* такой, что $H^\sigma \neq G^\sigma$. Тогда в *G* найдется нормальная подгруппа $N = \mathrm{Ker}\,\sigma$, для которой HN / N отлична от G / N. Тогда $HN / N \leq M / N < G / N$, где M / N – максимальная в G / N подгруппа. Из $H^G = G$ и максимальности *M* в *G* следует, что *M abn G*. Ввиду леммы 1.1 $M / N\ abn\ G / N$. Итак, H^σ содержится в $M^\sigma\ abn\ G^\sigma$. Утверждение (1) доказано.

Установим справедливость (2). Если $H\ cn\ G$, то по (1) *H X*-абнормальна в *G*.

Обратно. Пусть подгруппа *H* является *X*-абнормальной в *G*. Предположим, что $H^G \neq G$. Так как *G* разрешима, через H^G можно провести композиционный ряд

$$H^G = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_{n-1} = W \lhd H_n = G,$$

где H_i / H_{i-1} – циклическая группа простого порядка, $i = 1, \ldots, n$. Из 1) леммы 2.4 заключаем, что $1 \cong HW / W$ *X*-абнормальна в G / W, поэтому содержится в собственной абнормальной подгруппе из G / W. Но G / W является циклической группой простого порядка, поэтому не имеет собственных абнормальных подгрупп. Получили противоречие. Значит, $H^G = G$ и H является контранормальной в *G*. □

Заметим, что в общем случае *X*-абнормальность подгруппы не обязательно совпадает с контранормальностью. Например, в простой неабелевой группе единичная подгруппа является *X*-абнормальной, но не является контранормальной.

3 Основные результаты

Хорошо известно, что если подгруппы *A* и *B* имеют взаимно простые индексы в группе *G*, то $G = AB$. В 1960 году Виландт [21] доказал, что группа G разрешима, если она имеет три разрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты. В работе [22] Дерк установил сверхразрешимость группы G, имеющей четыре сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты. Фрисен [23] показал сверхразрешимость группы G с двумя нормальными сверхразрешимыми подгруппами, имеющими взаимно простые индексы в G. В этом направлении получена следующая.

***Теорема* 3.1.** *Группа G сверхразрешима, если она имеет три X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.*

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда G имеет три X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы H_1, H_2, H_3 с попарно взаимно простыми индексами. При этом сама группа G сверхразрешимой не является. Ясно, что $H_i \neq G,\ i = 1,2,3.$

По теореме Виландта группа G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Заметим, что при любом эпиморфизме σ группы G подгруппы H_i^{σ} являются X-абнормальными сверхразрешимыми подгруппами и имеют попарно взаимно простые индексы. Для факторгруппы G/N все условия теоремы выполняются. Поэтому G/N сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Так как по теореме 1.3 класс всех сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе G и $\Phi(G) = 1.$ Из разрешимости G следует, что N – p-группа для некоторого простого числа p, причем $N = C_G(N) = F(G).$ Заметим, что найдется максимальная в G подгруппа R такая, что $G = [N]R.$ Ввиду $R \cong G/N$ подгруппа R сверхразрешима.

Индекс любой подгруппы, не содержащей N, делится на p. Поэтому N содержится по крайней мере в двух подгруппах системы подгрупп $H_1, H_2, H_3.$ Будем считать, что $N \subseteq H_i,\ i = 1,2.$ Из $N = C_G(N)$ и $N \subseteq H_i$ следует, что $O_{p'}(H_i) = 1,$ а значит, $F(H_i)$ является p-группой для любого $i = 1,2.$ По теореме 1.2 H_i дисперсивна по Оре. Таким образом, p является наибольшим простым делителем порядка $|H_i|,\ i = 1,2,$ а значит, и группы G. Так как N – силовская p-подгруппа в H_i и N нормальна в $H_i,\ i = 1,2,$ то из $G = H_1 H_2$ вытекает, что N – силовская p-под-группа группы G. Следовательно, R – p'-группа.

Согласно тождеству Дедекинда

$$H_i = H_i \cap [N]R = [N](H_i \cap R)$$

для любого $i = 1,2.$ Из [1, лемма 4.5] следует, что $H_i / F(H_i) = H_i / N \simeq H_i \cap R$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1.$ Далее заметим, что $H_1 \cap R, H_2 \cap R$ имеют взаимно простые индексы в R, значит,

$$R = (H_1 \cap R)(H_2 \cap R).$$

Из 1) леммы 2.4 следует, что $H_i \cap R$ является X-абнормальной в R подгруппой, $i = 1,2.$ Так как $H_i \cap R$ абелева, а значит, нильпотентна, то по лемме 2.6 вытекает нильпотентность подгруппы R. Но тогда $H_i N / N,\ i = 1,2,$ является субнормальной и X-абнормальной подгруппой в G/N одновременно. По лемме 2.5 $H_i \cap R = R,$ значит, $H_i = G,\ i = 1,2.$ Получили противоречие. □

***Следствие* 3.1.1.** *Группа G сверхразрешима, если она имеет три контранормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих X-абнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если G метанильпотентна, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Тогда $G = H_1 H_2,$ где H_i – X-абнормальная сверхразрешимая подгруппа группы G, $i = 1,2,$ но G несверхразрешима. Так как по условию G метанильпотентна, то G разрешима.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Для факторгруппы G/N все условия леммы выполняются. Поэтому G/N сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Используя теорему 1.3, легко показать, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе G и $\Phi(G) = 1.$ В этом случае $G = [N]M,$ где N – p-группа (p – некоторое простое число), $N = C_G(N) = F(G),$ а M – некоторая сверхразрешимая максимальная подгруппа группы G.

Рассмотрим подгруппу $H_i N,$ где $i = 1,2.$ Если $H_i N = G,$ где $i = 1,2,$ то H_i – максимальная подгруппа группы G. Так как все дополнения к N являются максимальными подгруппами в G и сопряжены в ней, то по теореме Оре следует, что этот случай невозможен. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $H_1 N \neq G.$ Тогда $H_1 N / N$ является собственной подгруппой нильпотентной группы $G/N.$ Отсюда заключаем, что $H_1 N / N$ и субнормальна и X-абнормальна в $G/N.$ По лемме 2.5 $H_1 N / N = G/N.$ Получили противоречие. □

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть группа* $G = AB$ *есть произведение своих контранормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если G метанильпотентна, то группа G сверхразрешима.*

Напомним [8], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$*-субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп
$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$
такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n.$

***Теорема* 3.3.** *Пусть группа* $G = AB$ *– произведение сверхразрешимых* $\mathbb{P}$*-субнормальных в G подгрупп A и B. Если A и B X-абнормальны в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. По (*a*) теоремы 1.2 A и B дисперсивны по Оре. По [9, теореме 4.4] группа G дисперсивна по Оре, поэтому является разрешимой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как для G/N все условия теоремы выполняются, G/N – сверхразрешимая группа. По теореме 1.3 класс всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией. Поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G)$, N – p-группа для некоторого простого числа p. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Из дисперсивности по Оре группы G следует, что p – наибольший простой делитель $|G|$. Так как $M \cong G/N$ сверхразрешима и $O_p(M) = 1$ по [1, лемма 3.9], получаем, что N – силовская p-подгруппа группы G.

Подгруппа $AN = AN \cap NM = N(AN \cap M)$. Заметим, что $O_{p'}(AN) = 1$ и $F_p(AN) = N$. Ввиду $AN \in \mathfrak{U}$ из леммы 4.5 из [1] и теоремы 1.3 следует, что
$$AN / F_p(AN) \cong AN \cap M \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1).$$
Аналогично получаем, что
$$BN \cap M \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1).$$
Заметим, что $M = (AN \cap M)(BN \cap M)$ является произведением X-абнормальных в M подгрупп $AN \cap M$ и $BN \cap M$. Из лемм 2.5 и 2.6 следует, что $M \in \mathfrak{A}(p-1)$. Так как $G/N \in \mathfrak{U}$ и
$$M \cong G/F_p(G) \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$$
заключаем, что $G \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие. □

***Следствие* 3.3.1.** *Пусть группа* $G = AB$ *– произведение сверхразрешимых* $\mathbb{P}$*-субнормальных в G подгрупп A и B. Если A и B контранормальны в G, то G сверхразрешима.*

***Теорема* 3.4.** *Если группа* $G = AB = CD$, *где A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы, а C и D – X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы группы G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда $G = H_1H_2 = H_3H_4$, где H_i – субнормальная сверхразрешимая для $i = 1, 2$ и X-абнормальная сверхразрешимая подгруппа для $i = 3, 4$ группы G. При этом сама группа G сверхразрешимой не является. По [12, лемма 2.1] G дисперсивна по Оре и $G/F(G)$ нильпотентна. Значит, G разрешима.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда для факторгруппы G/N все условия теоремы выполняются. Поэтому G/N сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Из теоремы 1.3 и выбора G заключаем, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(G) = 1$, причем $N = C_G(N) = F(G)$. Кроме того $G = [N]R$, где R – некоторая максимальная подгруппа группы G. Заметим, что N – силовская p-подгруппа для наибольшего простого делителя p порядка группы G.

Если $H_3N = G = H_4N$, то H_i – максимальная подгруппа группы G для $i = 3, 4$. Все дополнения к N являются максимальными подгруппами в G и сопряжены в ней. Тогда $H_3 = H_4^g$ для некоторого $g \in G$ и $G = H_3H_4$, что невозможно по теореме Оре. Значит, найдется $i \in \{3, 4\}$, для которого $H_iN \neq G$. Допустим, что $H_3N \neq G$. Тогда в нильпотентной группе G/N подгруппа H_3N/N является собственной. Отсюда заключаем, что H_3N/N является субнормальной и X-абнормальной подгруппой в G/N одновременно. Из леммы 2.5 следует, что $H_3N/N = G/N$. Получили противоречие. При $H_4N \neq G$ аналогично приходим к противоречию. □

***Следствие* 3.4.1.** *Если группа* $G = AB = CD$, *где A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы, а C и D – контранормальные сверхразрешимые подгруппы группы G, то G сверхразрешима.*

Заключение

В работе найдены условия сверхразрешимости конечных групп, представимых произведением своих обобщенно абнормальных подгрупп.

Следующий пример показывает существенность условий доказанных теорем.

Пример. Пусть S – симметрическая группа степени 3. Согласно [2, B, 10.7] существует точный неприводимый модуль U над полем из 7 элементов. Нетрудно видеть, что $|U| = 7^2$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]S$.

Ясно, что группа G не является сверхразрешимой. Подгруппы $H_1 = UG_2$, $H_2 = UG_3$ и $H_3 = S$ (G_p – силовская p-подгруппа группы G, $p \in \{2,3\}$) являются по теореме 1.2 сверхразрешимыми подгруппами группы G. Отметим, что H_i, $i = 1,2,3$, имеют попарно взаимно простые индексы в группе G. Нетрудно видеть, что H_1 и H_3 – абнормальные подгруппы группы G, а $H_2 \trianglelefteq G$. Следовательно, требование наличия трех X-абнормальных подгрупп в теореме 3.1 является существенным.

Отметим, что в теореме 3.2 условие метанильпотентности группы G нельзя отбросить. Это следует из приведенного во введении примера симметрической группы S_4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

3. *Baer*, *R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

4. *Asaad*, *M.* On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53, № 4. – P. 318–326.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 11 (426). – С. 10–14.

6. *Alejandre*, *M.* On some permutable products of supersoluble groups / M. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

7. *Guo*, *W.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.

8. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

9. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

10. *Мурашко*, *В.И.* О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2012. – № 70 (4). – С. 24–27.

11. *Васильев*, *А.Ф.* О пермутируемых подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, В.А. Васильев, Т.И. Васильева // Сиб. мат. журн. – 2014. – Т. 55, № 2. – С. 285–295.

12. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 40–46.

13. *Монахов*, *В.С.* О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Сиб. мат. журн. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.

14. *Васильев*, *А.Ф.* Об абнормально факторизуемых конечных разрешимых группах / А.Ф. Васильев // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 9. – С. 1163–1171.

15. *Vasil'ev*, *A.F.* On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups / A.F. Vasil'ev // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – Vol. 85, № 1. – P. 305–311.

16. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [at al.]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.

17. *Rose*, *J.S.* Nilpotent Subgroups of Finite Soluble Groups / J.S. Rose // Math. Z. – 1968. – Vol. 106. – P. 97–112.

18. *Mann*, *A.* On subgroups of finite soluble groups. III / A. Mann // Israel J. Math. – 1973. – T. 16, № 4. – P. 446–451.

19. *Васильев*, *А.Ф.* Нормализаторные подгрупповые функторы конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2006. – № 1. – С. 92–96.

20. *Васильева*, *Т.И.* О построении π-классов Шунка конечных π-разрешимых групп / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 38–41.

21. *Wielandt*, *H.* Über Normalstruktur von mehrfach factorisierbaren Gruppen / H. Wielandt // Austral. Math. Soc. – 1960. – Vol. 1. – P. 143–146.

22. *Doerk*, *K.* Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

23. *Frisen*, D.R. Products of normal supersolvable subgroups / D.R. Frisen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 46–48.

Поступила в редакцию 11.05.2020.