УДК 517.538.52+517.538.53

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОГО РОДА

Н.В. Рябченко, Д.А. Волков, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

A CRITERION FOR THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF POLYORTHOGONAL POLYNOMIALS OF THE SECOND TYPE

N.V. Ryabchenko, V.A. Volkov, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

В работе введены новые понятия: допустимый индекс, почти совершенная система функций. С помощью этих понятий для произвольной системы степенных рядов лорановского типа сформулирован и доказан критерий единственности ассоциированного с этой системой полиортогонального многочлена, найден явный вид этого многочлена, а также явный вид многочленов, стоящих в числителе и знаменателе соответствующих аппроксимаций Паде. Доказанные утверждения дополняют хорошо известные результаты в теории полиортогональных многочленов и аппроксимаций Паде.

***Ключевые слова**: аппроксимации Паде, полиортогональные многочлены, нормальный индекс, совершенная система, определители Ганкеля.*

New concepts are introduced in the work: an admissible index and an almost perfect system of functions. Using these concepts for an arbitrary system of power series of Laurent type a criterion for the uniqueness of an associated with this system of a polyorthogonal polynomial is formulated and proved. The explicit form of this polynomial is found, as well as the explicit form of polynomials standing in the numerator and denominator of the corresponding of Pade approximations. The propositions proved complement the well-known results the in theory of polyorthogonal polynomials and Pade approximations.

***Keywords**: Padé approximations, polyorthogonal polynomials, normal index, perfect system, Hankel determinant.*

Введение

Многочлены, удовлетворяющие нестандартным условиям ортогональности, естественным образом возникают в качестве общего знаменателя аппроксимаций Паде для системы марковских функций [1, с. 158]. В этом контексте их принято называть *полиортогональными* многочленами (другое название – «multiple orthogonal polynomial»). Для полиортогональных многочленов соотношения ортогональности распределены между несколькими мерами $\mu_1,...,\mu_k$. Особый интерес представляют такие меры, для которых общую теорию ортогональных многочленов можно распространить на полиортогональные многочлены. Ряд важных и основополагающих результатов в этом направлении исследований получен в [2]–[7]. Например [6], если для каждого j мера μ_j абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и на контуре Δ_j представима в виде $\mu_j(z)=\omega_j(z)dz$, а весовая функция ω_j удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению Пирсона, то полиортогональный многочлен может быть представлен с помощью формулы Родрига.

Будем рассматривать близкую по постановке задачу. В классической теории ортогональных многочленов хорошо известно представление ортогонального многочлена Q_n в детерминантном виде:

$$Q_n(z)=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, \qquad (0.1)$$

где $s_i=\int\limits_{\Delta} x^i d\mu(x),\ i=0,1,...$ – последовательность степенных моментов меры μ, носитель которой совпадает с отрезком ортогональности Δ. Многочлен Q_n является n-ым ортогональным многочленом для марковской функции

$$f(z)=\int\limits_{\Delta}\frac{d\mu(x)}{z-x}, z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta,$$

которая может быть представлена степенным рядом

$$f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{s_i}{z^{i+1}}.$$

Тождество (0.1) устанавливается (см., например, [8, с. 333]) в результате процесса ортогонализации Гильберта – Шмидта линейно независимой системы $1,x,...,x^n$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ.

В данной работе, в частности, доказывается, что аналогичное представление справедливо и для полиортогонального многочлена, если известны степенные моменты мер μ_j. Более того, мы рассматриваем понятие ортогональности в более широком смысле (см., например, [1, с. 60], [9]), когда ортогональный многочлен определяется для произвольной последовательности $\{s_i\}$, не связанной никакими ограничениями. В этой общей ситуации найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности полиортогонального многочлена, при выполнении которых он представляется в детерминантном виде аналогично равенству (0.1).

1 Полиортогональные многочлены. Определения и свойства

Множество k-мерных мультииндексов (индексов) $n=(n_1,...,n_k)$, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок индекса $n=(n_1,...,n_k)$ – это сумма $|n|:=n_1+...+n_k$.

Пусть $s=(s_0,s_1,...)$ – произвольная последовательность комплексных чисел. В комплексном линейном пространстве $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, состоящем из многочленов, определим линейный функционал $\mathfrak{S}_s$: если $T\in\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, $n\in\mathbb{Z}_+^1$ и

$$T(z)=t_0+t_1z+...+t_nz^n,$$

то полагаем

$$\mathfrak{S}_s(T(z)):=t_0s_0+t_1s_1+...+t_ns_n.$$

Рассмотрим теперь k произвольных последовательностей $s^j=(f_0^j,f_1^j,...)$ и соответствующий им набор (систему) $f=(f_1,...,f_k)$, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f_i^j}{z^{i+1}}, j=1,2,...,k. \qquad (1.1)$$

Обозначим через $\mathfrak{S}_{s^j}$ функционал, соответствующий последовательности s^j.

***Определение* 1.1.** *Пусть* $n=(n_1,...,n_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ – *ненулевой мультииндекс. Тождественно не равный нулю многочлен* $Q=Q_{|n|}$, $\deg Q\leqslant|n|$ *будем называть n-ым полиортогональным многочленом* (II-*го типа*) *для набора формальных степенных рядов* (1.1), *если*

$$\begin{gathered}\mathfrak{S}_{s^j}(Q(z)\cdot z^{\nu})=0,\\ \nu=0,1,...,n_j-1; j=1,2,...,k.\end{gathered} \qquad (1.2)$$

Здесь предполагается, что $n_j\neq0$. *Если* $n_{j_0}=0$, *то в* (1.2) *индекс j пробегает значения* $\{1,...,j_0-1,j_0+1,....,k\}$, *т. е. последовательность* s^{j_0} *и ряд* f_{j_0} *в определении полиортогонального многочлена не участвуют. Для* $n=(0,...,0)$ 0-*ым полиортогональным многочленом по определению считаем* $Q(z)\equiv1$.

***Определение* 1.2.** *Многочленами второго рода для n-го полиортогонального многочлена Q назавём многочлены*

$$P_j(z)=\mathfrak{S}_{s^j}\left(\frac{Q(z)-Q(\lambda)}{z-\lambda}\right), j=1,2,...,k,$$

где $\mathfrak{S}_{s^j}$ *действует на многочлен переменной* λ.

***Определение* 1.3.** *Компоненты вектора*

$$\pi_n=\left(\frac{P_1}{Q},...,\frac{P_k}{Q}\right)$$

называют n-ми совместными диагональными аппроксимациями Паде для набора f, а пару (Q,P), *где* $P=(P_1,...,P_k)$, *называют n-ой парой Паде.*

В том случае, когда μ_j при каждом $j=1,...,k$ является положительной борелевской мерой на вещественной прямой с компактным бесконечным спектром, носителем которой являются отрезок Δ_j, а

$$f_j(z)=\int_{\Delta_j}\frac{d\mu_j(x)}{z-x}, z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j, j=1,2,...,k \qquad (1.3)$$

– соответствующий набор марковских функций, соотношения ортогональности (1.2) принимают привычный вид:

$$\int_{\Delta_j}Q(x)\cdot x^{\nu}d\mu_j(x)=0,$$

$$\nu=0,1,...,n_j-1; j=1,2,...,k.$$

При этом функция f_j представляется соответствующим рядом (1.1), где

$$f_i^j=\int_{\Delta_j}x^id\mu_j(x), i=0,1,...$$

– последовательность степенных моментов меры μ_j, а многочлены второго рода для n-го полиортогонального многочлена Q представляются в виде [1, с. 158]

$$P_j(z)=\int_{\Delta_j}\frac{Q(z)-Q(x)}{z-x}d\mu_j(x), j=1,2,...,k.$$

Полиортогональный многочлен Q условиями (1.2) определяется не однозначно, а с точностью до мультипликативного множителя. Эта неединственность может быть и более существенной. Приведём соответствующий пример.

***Пример* 1.1.** Пусть $k=2$, $n=(1,1)$. Тогда для функций

$$f_1(z)=-f_2(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+...$$

многочлен Q_2 с точностью до множителя представим в виде:

$$Q_2(z)=(a+bz)-\frac{1}{4}(a+2b)z^2,$$

где a и b – любые действительные числа.

***Определение* 1.4.** *Будем говорить, что n-ый полиортогональный многочлен Q однозначно определяется условиями* (1.2), *если для любых двух таких многочленов* Q', Q'' *найдётся комплексное число* λ, *что* $Q'' \equiv \lambda Q'$.

Центральными в теории полиортогональных многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы.

***Определение* 1.5.** *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *называется нормальным для системы f, если для любого n-го полиортогонального многочлена Q имеем* $\deg Q = |n|$.

Хорошо известно [1, с. 54], что при $k = 1$ индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ является нормальным тогда и только тогда, когда определитель Ганкеля H_n, элементами которого являются коэффициенты ряда f_1,

$$H_0 = 1, H_1 = f_0^1,$$

$$H_n = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{n-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \dots & f_{2n-2}^1 \end{vmatrix}, n > 1$$

отличен от нуля. Для $k > 1$ критерий нормальности индекса нам неизвестен. Заметим также, что нулевой индекс $n = (0,...,0)$ является нормальным для любой системы *f*.

***Определение* 1.6.** *Система f называется совершенной, если все индексы* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *являются нормальными для f.*

Например, если носители Δ_j мер μ_j попарно не перекрываются (не имеют общих внутренних точек), то система $f = (f_1,...,f_k)$, состоящая из марковских функций (1.3), является совершенной [1, с. 159]. В цитируемых выше работах рассматриваются только совершенные системы. Поскольку нормальность индекса *n* является достаточным условием единственности *n*-го полиортогонального многочлена *Q*, то для совершенных систем такой многочлен существует и единственен (в смысле принятого определения) при любом $n \in \mathbb{Z}_+^k$. Следующий пример показывает, что нормальность индекса *n* не является необходимым условием единственности многочлена *Q*.

***Пример* 1.2.** Пусть $k = 1$, $n = 2$, а

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{8}{z^4} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \dots.$$

Тогда с точностью до числового множителя

$$Q_2(z) = z - 2,$$

т. е. многочлен Q_2 определяется однозначно, в то время, как индекс $n = 2$ не является нормальным, поскольку $\deg Q_2 \neq 2$.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и систему *f*, при которых *n*-ый полиортогональный многочлен определяется однозначно. Прежде чем это сделать, отметим, что для некоторых известных совершенных систем *f* полиортогональные многочлены хорошо изучены и нашли применение в различных областях алгебры, анализа, теоретической физики, в том числе, в рамках теории аппроксимаций Паде (см., например, [10]–[16]). В одномерном случае хорошо известно, что *n*-ый ортогональный многочлен *Q* является знаменателем *n*-ой подходящей дроби (в нашей терминологии – аппроксимации Паде π_n), так называемой чебышёвской непрерывной дроби ряда f_1. Точно также при $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *n*-ый полиортогональный многочлен *Q* можно определить как общий знаменатель совместных аппроксимаций Паде для системы $f = (f_1,...,f_k)$ [1, с. 158–159]. Отметим, что случаи $k = 1$ и $k > 1$ существенно различны. При $k = 1$ для любой пары Паде (Q, P) отношение P/Q определяет одну и ту же рациональную функцию. В многомерном случае вектор π_n определяется, вообще говоря, неоднозначно. Для заданных $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и *f* вектор π_n определен однозначно, если однозначно определен соответствующий *n*-ый полиортогональный многочлен Q_n. Например, если система *f* – совершенна.

2 Критерий единственности. Явный вид полиортогонального многочлена

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Для $n_j \neq 0$ определим матрицы порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \begin{pmatrix} f_0^j & f_1^j & \dots & f_{|n|}^j \\ f_1^j & f_2^j & \dots & f_{|n|+1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j}^j & \dots & f_{|n|+n_j-1}^j \end{pmatrix}, j = 1, 2, ..., k;$$

а затем матрицу порядка $|n| \times (|n|+1)$

$$F_n = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^k \end{bmatrix}.$$

При $n_j = 0$ матрица F_n не содержит блок-матрицу F^j. Если к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку

$$E(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & \dots & z^{|n|-1} & z^{|n|} \end{pmatrix},$$

то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид

$$det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T =$$

$$=\begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ 1 & z & \dots & z^{|n|} \end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

***Определение* 2.1.** *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *будем называть допустимым для f, если ранг матрицы* F_n *равен* $|n|$.

В примере 1.1 индекс $n=(1,1)$ не является нормальным и не является допустимым, а в примере 1.2 индекс $n=2$ не является нормальным, но является допустимым для рассматриваемых в этих примерах систем функций.

***Определение* 2.2.** *Систему f будем называть почти совершенной, если все индексы* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *являются допустимыми для f.*

Сформулируем и докажем основную теорему.

***Теорема* 2.1.** *Для того, чтобы для ненулевого индекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *и системы f n-ый полиортогональный многочлен* $Q_{|n|}$ *определялся условиями* (1.2) *однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был допустимым для f, т. е.* $\mathrm{rang}F_n = |n|$.

Если $rangF_n = |n|$, *то при определённом выборе мультипликативного множителя полиортогональный многочлен* $Q_{|n|}$ *представляется в виде*

$$Q_{|n|}(z) = det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть многочлен

$$Q_{|n|}(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{|n|} z^{|n|}.$$

удовлетворяет условиям (1.2). Тогда система уравнений для определения коэффициентов $b_0, \dots, b_{|n|}$ в матричной форме примет вид:

$$F_n \times b^T = \theta^T, \qquad (2.3)$$

где $b=(b_0, b_1, \dots, b_{|n|})$ – матрица-строка, а θ – матрица-строка порядка $1\times(|n|+1)$, все элементы которой равны нулю. Поскольку система (2.3) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то согласно теореме Кронекера – Капелли она имеет ненулевое решение, а множество всех её линейно независимых решений состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $rangF_n = |n|$. В этом случае все её ненулевые решения можно получить умножением фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы 2.1 доказана.

Пусть теперь $F_n = |n|$. Покажем, что в этом случае многочлен $Q_{|n|}$, определённый формулой (2.2), действительно является решением системы (2.3). Разлагая определитель в (2.1) по элементам последней строки, легко заметить, что $\deg Q_{|n|} \leqslant |n|$, и, по крайней мере, один из коэффициентов этого многочлена отличет от нуля, т. е. $Q_{|n|}$ тождественно не равен нулю. Остаётся доказать, что многочлен $Q_{|n|}$ удовлетворяет условиям (1.2). Для этого, предположив, что $n_j \neq 0$, применим функционал $\mathfrak{S}_{s^j}$ к последней строке определителя (2.2), которую предварительно умножим на z^{ν}. В результате получим

$$\mathfrak{S}_{s^j}(Q_{|n|}(z)\cdot z^{\nu}) =$$

$$=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^j & f_1^j & \dots & f_{|n|}^j \\ f_1^j & f_2^j & \dots & f_{|n|+1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j}^j & \dots & f_{|n|+n_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{\nu}^j & f_{\nu+1}^j & \dots & f_{|n|+\nu}^j \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

$$j = 1, 2, \dots, k.$$

При $\nu = 0, 1, \dots, n_j - 1$ определитель в (2.4) имеет две одинаковые строки. Поэтому он равен нулю. Таким образом условия (1.2) для многочлена $Q_{|n|}$ выполняются. □

3 Замечания и следствия

В первую очередь следует сказать, что если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ не является допустимым для *f*, то многочлен $Q_{|n|}$, определённый равенством (2.2), не являются *n*-м полиортогональным многочленом для *f*. Так для системы (f_1, f_2) из примера 1.1 многочлен $Q_2(z) = (a+bz)-(a+2b)z^2/4$. Однако, если этот многочлен находить по формуле (2.2), то получим, что $Q_2(z) \equiv 0$.

Легко заметить, что компонента n_j мультииндекса $n=(n_1, \dots, n_k)$ определяет число коэффициентов ряда f_j, которое учитывается при построении многочленов $Q_{|n|}$. Если, например, $n=(n_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то $|n| = n_1$. Отождествляя n_1 с *n* получим представление

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \dots & f_{2n-1}^1 \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix},$$

совпадающее с классической формулой (0.1).

Опираясь на теорему 2.1, с помощью тех же рассуждений, что и в одномерном случае, нетрудно получить критерий нормальности индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ при $k > 1$.

***Следствие* 3.1.** *Ненулевой индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *является нормальным для* f *тогда и только тогда, когда определитель*

$$H_n^k = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|-1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-2}^k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как и раньше считаем, что при $n_j = 0$ *в определителе* H_n^k *отсутствует блок, состоящий из коэффициентов ряда* f_j, *при* $n = (0,...,0)$ $H_0^k = 1$, *а, например, при* $n = (1,0,...,0)$ $H_n^k = f_0^1$.

Следствие 3.1 позволяет сделать вывод о том, что любая совершенная система является почти совершенной системой. Обратное утверждение, очевидно, неверно.

***Следствие* 3.2.** *Полиортогональный многочлен* Q_n *определен однозначно для всех мультииндексов* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *тогда и только тогда, когда система f является почти совершенной.*

Будем искать явный вид многочленов второго родя для *n*-го полиортогонального многочлена (1.2). Для этого к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку

$$(f_{n_j+i-1}^j f_{n_j+i+1}^j \dots f_{|n|+n_j+i-2}^j f_{|n|+n_j+i-1}^j).$$

Определитель полученной квадратной матрицы обозначим через $d_{n,i}^j$ Рассмотрим также функциональную матрицу-строку порядка $1 \times (|n|+1)$

$$E_j(z) =$$

$$= \left(0 \; f_0^j \;\; f_0^j z + f_1^j \; \dots \sum_{p=0}^{|n|-2} f_p^j z^{|n|-p-2} \; \sum_{p=0}^{|n|-1} f_p^j z^{|n|-p-1} \right).$$

***Следствие* 3.3.** *Если* $rangF_n = |n|$, *а n-ый полиортогональный многочлен* $Q_{|n|}$ *определяется формулой* (1.2), *то справедливы представления:*

$$P_j(z) = det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E_j(z) \end{bmatrix}^T, \quad (3.1)$$

$$Q_{|n|}(z) f_j(z) - P_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{n_j+i}}. \quad (3.2)$$

Функцию $Q_{|n|}(z) f_j(z) - P_j(z)$ *называют j-ой остаточной функцией для пары* (Q, P).

Доказательство. По определению многочлен $P_j(z)$ определяется равенством

$$P_j(z) = \mathfrak{S}_{s^j}\left(\frac{Q(z) - Q(\lambda)}{z - \lambda} \right).$$

Определитель $(Q(z) - Q(\lambda)) / (z - \lambda)$ отличается от определителя, стоящего в правой части равенства (2.2), только последней строкой: место строки $E(z)$ в нем стоит строка

$$\left(0 \quad 1 \quad z + \lambda \quad z^2 + z\lambda + \lambda^2 \quad \dots \quad \sum_{p=0}^{|n|-1} z^{|n|-p-1} \lambda^p \right).$$

Применяя функционал $\mathfrak{S}_{s^j}$ к последней строке этого определителя, получим (3.1).

Чтобы найти явный вид *j*-ой остаточной функцией для пары (Q, P), рассмотрим

$$Q_{|n|}(z) f_j(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^i} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i-|n|+1}} \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

При $n_j \neq 0$ в определителе (3.3) выделим блок F^j. Далее, вычтем из последней строки этого определителя первую строку блока F^j, умноженную на z^{-1}, вторую строку блока F^j, умноженную на z^{-2}, и так далее, вплоть до последней строки блока F^j, умноженной на z^{-n_j}. В результате вместо определителя (3.3) получим равный ему определитель, у которого в последней строке ряды имеют лакуны длинной n_j. Сохраняя только начальные строки этих рядов, придём к определителю $P_j(z)$, для которого, с учетом проделанных преобразований,

$$Q_{|n|}(z) f_j(z) - P_j(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}} & \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_{i+1}^j}{z^{i+1}} & \dots & \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_{i+|n|}^i}{z^{i+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{n_j+i}}.$$

Здесь мы воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Очевидно, что предыдущее равенство справедливо и при $n_j = 0$. Заметим также, что ряд в (3.2) является формальным, если соответствующий ряд в (1.1) является формальным.

В заключении заметим, что аналогичные результаты получены нами и для полиортогональных многочленов I-го типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2. *Aptekarev*, *A.I.* Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi-Bessel polynomials / A.I. Aptekarev, F. Marcellán, I. Rocha // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 1. – P. 177–146.

3. *Aptekarev*, *A.I.* Multiple orthogonal polynomials /A.I. Aptekarev // Comput. Appl. Math. – 1998. – Vol. 99, № 1–2. – P. 423–447.

4. *Aptekarev*, *A.I.* The genetic sums' representation for the moments of a system of Stieltjes functions and its application / A.I. Aptekarev, V. Kaliaguine, J. Van Iseghem // Constr. Approx. – 2000. – Vol. 16. – P. 487–524.

5. *Van Assche*, *W.* Some classical multiple orthogonal polynomials / W. Van Assche, E. Coussement // J. Comput. Appl. Math. – 2001. – Vol. 127. – P. 317 – 347.

6. *Aptekarev*, *A.I.* Multiple orthogonal polynomials for classcal weights / A.I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche // Transactions of the American Mathematical Society – 2003. – Vol. 355, № 10. – P. 3887–3914.

7. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights / A.B.J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky // Comm. Math. Phys. – 2009. – Vol. 286, № 1. – P. 217–275.

8. *Натансон*, *И.П.* Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

9. *Frank*, *E.* Orthogonality properties of C-fractions / E. Frank // Bull. Amer. Math. Soc. – 1955. – Vol. 58. – P. 384–390.

10. *Beukers*, *F.* A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ / F. Beukers // Bull. London Math. Soc. – 1979. – Vol. 11. – P. 268–272.

11. *Сорокин*, *В.Н.* Аппроксимации Эрмита – Паде для систем Никишина и иррациональность числа $\zeta(3)$ / В.Н. Сорокин // УМН – 1994. – Т. 49, № 2. – P. 167–168.

12. *Калягин*, *В.А.* Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 6. – P. 79–100.

13. *Aptekarev*, *A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.

14. *Daems*, *E.* Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions / E. Daems, A.B.J. Kuijlaars // J. Approx. Theory. – 2007. – Vol. 146, № 1. – P. 91–114.

15. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Singular values of products of Ginibre random matrices, multiple orthogonal polynomials and hard edge scalings / A.B.J. Kuijlaars, L. Zhang // Comm. Math. Phys. – 2014. – Vol. 332, № 2. – P. 750–781.

16. *Mukhin*, *E.* Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to the Gaudin Bethe Ansatz conjecture / E. Mukhin, A. Varchenko // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 359, № 11. – P. 5383–5418.

Поступила в редакцию 05.05.2020.