Проблемы физики, математики и техники, № 2 (43), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ СУБНОРМАЛЬНЫМИ 2-МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

М.Н. Коновалова[1], **В.С. Монахов**[2]

[1]*Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ*, *Брянск*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

FINITE GROUPS WITH SOME SUBNORMAL 2-MAXIMAL SUBGROUPS

M.N. Konovalova[1], **V.S. Monakhov**[2]

[1]*Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration*, *Bryansk*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Изучается конечная группа, у которой в каждой максимальной подгруппе существует субнормальная в группе подгруппа. В частности, доказывается, что коммутант такой группы нильпотентен.

Ключевые слова: *конечная группа*, *субнормальная подгруппа*, 2-*максимальная подгруппа.*

A finite group *G* such that in every maximal subgroup of *G* there is a subnormal in *G* subgroup is studied. In particular, we proved that the derived subgroup of *G* is nilpotent.

Keywords: *finite group*, *subnormal subgroup*, 2-*maximal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Обозначения и используемые результаты соответствуют [1], [2]. Запись $M < G$ $(M \lessdot G)$ означает, что *M* – собственная (максимальная) подгруппа группы *G*.

Пусть *H* – подгруппа группы *G*. Если существует максимальная в группе *G* подгруппа *M* такая, что *H* является максимальной подгруппой в *M*, то *H* называется 2-максимальной подгруппой группы *G*.

Строение группы существенно зависит от свойств ее 2-максимальных подгрупп. Наиболее ранний результат был получен Хуппертом, установившим [3] сверхразрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нормальны. Группа с субнормальными 2-максимальными подгруппами либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми собственными подгруппами [4], [5]. Группы с формационными ограничениями на 2-максимальные подгруппы исследовались в [6]–[8].

В настоящей работе изучается группа, у которой в каждой ненормальной максимальной подгруппе существует субнормальная в группе подгруппа, являющаяся 2-максимальной подгруппой группы. В частности, доказывается, что коммутант такой группы нильпотентен.

1 Вспомогательные результаты

Пусть *M* – подгруппа группы *G*. Пересечение всех подгрупп группы *G*, сопряженных с подгруппой *M*, называется ядром подгруппы *M* и обозначается M_G. Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы *G* обозначаются $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $X \rtimes Y$ означает полупрямое произведение, в котором подгруппа *X* нормальна.

***Лемма* 1.1.** *Пусть M – максимальная подгруппа группы* G *и* $K \le M$. *Если подгруппа K субнормальна в G, то* $K \le M_G$. *В частности, если K – максимальная подгруппа в M и M ненормальна в G, то* $K = M_G$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по индексу подгруппы *K* в группе *G*. Будем считать, что для всех субнормальных подгрупп, индекс которых меньше индекса подгруппы *K*, утверждение справедливо. Предположим, что существует элемент $m \in M$ такой, что $K \ne K^m$. Согласно [1, 2.43] подгруппа $H = \langle K, K^m \rangle$ субнормальна в G и $H \le M$. Так как K – собственная подгруппа в *H*, то $|G:H| < |G:K|$. Применяя индукцию к подгруппе *H*, получаем, что $H \le M_G$. Но $K \le H$, поэтому $K \le M_G$, что и требовалось доказать.

Теперь считаем, что $M \le N_G(K)$. Если $N_G(K) = G$, то $K \le M_G$. Пусть $N_G(K) \ne G$. Из того, что *M* – максимальная подгруппа группы *G* следует, что $M = N_G(K)$. Так как *K* – субнормальная подгруппа группы *G* и *K* ненормальна в *G*, то существует субнормальная подгруппа K_1 в *G* такая, что $K \lhd K_1$, $K \ne K_1 \ne G$. Ясно, что $K_1 \le M$ и $|G:K_1| < |G:K|$. По индукции $K_1 \le M_G$, поэтому $K \le M_G$. □

В [9] Гашюц изучил пересечение ненормальных максимальных подгрупп группы G, которое обозначил $\Delta(G)$. Из определений $\Phi(G)$ и $\Delta(G)$ следует, что $\Phi(G) \le \Delta(G)$.

***Лемма* 1.2** [9, с. 276]. *Пересечение* $\Delta(G)$ *всех ненормальных максимальных подгрупп ненильпотентной группы G нильпотентно и*

$$\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G)).$$

***Лемма* 1.3.** (1) *Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда подгруппа Фраттини* $\Phi(G)$ *группы G совпадает с пересечением максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга* [10].

(2) *Пусть G – разрешимая ненильпотентная группа. Тогда подгруппа* $\Delta(G)$ *совпадает с пересечением максимальных ненормальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга* [11].

Сформулированные в лемме 1.3 результаты получили развитие в [12].

***Лемма* 1.4.** *Пусть U и V – нормальные подгруппы группы G. Если* $V \le U \cap \Delta(G)$ *и* U/V *нильпотентна, то U нильпотентна. В частности,* $F(G/\Delta(G)) = F(G)/\Delta(G)$.

Доказательство. Предположим, что U ненильпотентна. Тогда в U существует ненормальная силовская подгруппа P и $N_U(P)$ абнормальна в U [13, лемма 17.1]. Поскольку PV/V – силовская подгруппа в U/V и U/V нильпотентна, то PV/V нормальна в G/V. Поэтому PV нормальна в G и $G = N_G(P)V$ по лемме Фраттини. Пусть W – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. Если W ненормальна в G, то

$$V \le \Delta(G) \le W,\ G = N_G(P)V \le W,$$

противоречие. Пусть W нормальна в G. Тогда

$$N_U(P) = N_G(P) \cap U \le W \cap U = U,$$

поскольку $W \cap U$ нормальна в U и каждая подгруппа, содержащая абнормальную в U подгруппу $N_U(P)$, совпадает [13, лемма 17.2] со своим нормализатором в подгруппе U. Поэтому опять $G = N_G(P)V \le WU = W$, противоречие. Следовательно, предположение неверно и подгруппа U нильпотентна.

Поскольку $\Delta(G)$ нормальна в G и нильпотентна, то $\Delta(G) \le F(G)$ и

$$F(G)/\Delta(G) \le F(G/\Delta(G)).$$

Полагая в доказанном

$$V = \Delta(G), F(G/\Delta(G)) = U/\Delta(G)$$

получаем, что подгруппа U нильпотентна, поэтому

$$U \le F(G), U/\Delta(G) \le F(G/\Delta(G)).$$

Следовательно, $F(G/\Delta(G)) = F(G)/\Delta(G)$. □

***Лемма* 1.5.** *Если G – разрешимая группа, то* $F(G/X) = F(G)/X$ *для любой нормальной в G подгруппы* $X \in \{Z(G), \Phi(G), \Delta(G)\}$.

Доказательство. Для $X = \Phi(G)$ и $X = Z(G)$ это следует из [1, 4.21]; при $X = \Delta(G)$ – из леммы 1.4. □

***Лемма* 1.6.** *Пусть* $H \lessdot M \lessdot G$ *и M ненормальна в G. Если H перестановочна с* M^x *для каждого* $x \in G$, *то* $H = M_G$.

Доказательство. Предположим, что H не содержится в M_G. Тогда существует $x \in G$ такой, что H не содержится в M^x. По условию $HM^x = M^xH$, поэтому $HM^x = G$. Так как $H \le M$, то $G = MM^x$, противоречие. Поэтому предположение неверно и $H \le M_G$. Поскольку $H \lessdot M$, то либо $M_G = M$, либо $H = M_G$. Если $M_G = M$, то M нормальна в G, что противоречит условию. Поэтому $H_G = M$.

2 Нильпотентность коммутанта группы с некоторыми субнормальными подгруппами

Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ – прямое произведение. Согласно [14, с. 53] подгруппа H группы G является *подпрямым произведением* групп G_i, если проекция H на каждый множитель G_i совпадает с G_i.

***Лемма* 2.1** [14, теорема 4.3.9], [1, 2.3]. *Пусть в группе G задано семейство нормальных подгрупп* K_i *и K – их пересечение. Тогда фактор-группа* G/K *изоморфна подпрямому произведению фактор-групп* G/K_i.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Свойства групп Шмидта и их приложения в теории групп и их классов изложены в [15]. Частным случаем групп Шмидта являются группы типа A. *Группой типа A* называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы примарны. Примером группы типа A служит естественное полупрямое произведение элементарной абелевой p-группы P порядка p^m и группы Q порядка q, где m – показатель числа p по модулю q. Из свойств групп Шмидта легко выводится описание групп типа A.

***Лемма* 2.2** [15]. (1) *Если S – группа типа A, то* $S = P \rtimes Q$, *подгруппа P является минимальной нормальной в S подгруппой, подгруппа Q имеет простой порядок и Q действует неприводимо на P.*

(2) *Если S – группа Шмидта, то* $S/\Phi(S)$ *– группа типа A. Обратно, если S – группа Шмидта,* $N \lhd S$ *и* S/N *– группа типа A, то* $N = \Phi(S)$.

Теорема 2.1. *Пусть в группе G в каждой ненормальной максимальной подгруппе существует максимальная подгруппа, субнормальная в G. Тогда фактор-группа* $G/\Delta(G)$ *изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности,* $G/F(G)$ *– абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. Пусть $M \lessdot G$, подгруппа M ненормальна в G. По условию существует субнормальная в G подгруппа H такая, что $H \lessdot M$. По свойствам субнормальных подгрупп подгруппа $H = H \cap M$ субнормальна в M, поэтому H нормальна в M и

$$|M/H| = q \in \pi(M).$$

Так как H субнормальна в G, то существует цепочка подгрупп

$$H \lhd K \lhd \ldots \lhd G, H < K.$$

Если $M = K$, то M нормальна в G, противоречие. Значит, $M \neq K$ и $G = \langle M, K \rangle \leq N_G(H)$, т. е. подгруппа H нормальна в G.

Фактор-группа G/H содержит ненормальную максимальную подгруппу M/H простого порядка q, поэтому M/H – силовская q-подгруппа в G/H. Согласно [2, IV.7.4] фактор-группа G/H разрешима. Пусть P/H – минимальная нормальная в G/H. Тогда P/H – элементарная абелева p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G/H)$ и $G/H = P/H \rtimes M/H$. Ясно, что в G/H каждая собственная подгруппа примарная, поэтому G/H – группа типа A порядка $p^m q$, где $p^m = |P/H|$, m – показатель числа p по модулю $q = |Q|$, см. лемму 2.2.

Пусть теперь $M_1, M_2, \ldots, M_n$ – все ненормальные в G максимальные подгруппы и $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – субнормальные в G подгруппы такие, что $H_i \lessdot M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. По доказанному для каждого i подгруппа H_i нормальна в G и $G/H_i = P_i/H_i \rtimes M_i/H_i$ – группа типа A, в частности, $|M_i/H_i| = q_i \in \pi(G)$. Так как $\Delta(G) \leq M_i$ для каждого i и подгруппа M_i ненормальна в G, то $M_i \neq H_i\Delta(G)$ и $\Delta(G) \leq H_i$ для каждого i. Поэтому

$$\Delta(G) \leq \cap_{i=1}^n H_i \leq \cap_{i=1}^n M_i = \Delta(G),$$

$$\Delta(G) = \cap_{i=1}^n H_i.$$

Теперь фактор-группа

$$G/\cap_{i=1}^n H_i = G/\Delta(G)$$

по лемме 2.1 будет подпрямым произведением прямого произведения

$$G/H_1 \times G/H_2 \times \ldots \times G/H_n = \bar{G}.$$

Поскольку

$$F(\bar{G}) = P_1/H_1 \times P_2/H_2 \times \ldots \times P_n/H_n,$$

$$\bar{G}/F(\bar{G}) \cong M_1/H_1 \times M_2/H_2 \times \ldots \times M_n/H_n,$$

то $F(\bar{G}) \in \mathfrak{A}_1$, $\bar{G}/F(\bar{G}) \in \mathfrak{A}_1$ и $\bar{G} \in \mathfrak{A}_1^2$. Здесь $\mathfrak{A}_1$ – формация всех абелевых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Так как $\mathfrak{A}_1^2$ – наследственная формация, то $G/\Delta(G) \in \mathfrak{A}_1^2$ и группа G содержит нормальную подгруппу U такую, что

$$\Delta(G) \leq U, \ U/\Delta(G) \in \mathfrak{A}_1, \ G/U \in \mathfrak{A}_1.$$

По лемме 1.4 $U \leq F(G)$, поэтому

$$G/F(G) \cong (G/U)/(F(G)/U) \in \mathfrak{A}_1$$

и фактор-группа $G/F(G)$ будет абелевой группой с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. □

3 Некоторые приложения теоремы 2.1

Подгруппа H группы G называется *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. Абнормальная подгруппа совпадает со своим нормализатором. Примерами абнормальных подгрупп служат нормализаторы силовских подгрупп [2, VI.11.16], подгруппы Картера [2, VI.12.2], Гащюца [1, с. 184] и др. Фаттахи [16] получил описание групп, у которых любая подгруппа субнормальна или абнормальна. Группы, в которых некоторые подгруппы абнормальны или формационно субнормальны, исследовались в работах многих авторов, см. литературу в [17], [18]. К этому направлению относится следующий результат, который непосредственно вытекает из теоремы 2.1.

***Следствие* 3.1.** *Пусть в разрешимой группе G в каждой ненормальной максимальной подгруппе любая максимальная подгруппа субнормальна в G или абнормальна. Тогда фактор-группа* $G/\Delta(G)$ *изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности,* $G/F(G)$ *– абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. Пусть M – ненормальная максимальная подгруппа разрешимой группы G и H – произвольная максимальная подгруппа в M. По условию H субнормальна в G или абнормальна. В каждой неединичной разрешимой группе существует нормальная максимальная подгруппа. Если K нормальна в M и максимальна, то K не абнормальна и по условию подгруппа K субнормальна в G. Следовательно, в каждой ненормальной максимальной подгруппе существует максимальная подгруппа, субнормальная в G. Поэтому группа G удовлетворяет требованиям теоремы 2.1 и фактор-группа $G/\Delta(G)$ изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности, $G/F(G)$ – абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. □

Учитывая лемму 1.6, получаем также

***Следствие* 3.2.** *Пусть в группе G в каждой ненормальной максимальной подгруппе существует максимальная подгруппа, перестановочная со всеми максимальными подгруппами группы G. Тогда* $G/F(G)$ *– абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Васильев А.Ф. и Мурашко В.И. предложили [19] следующее понятие. Подгруппа H группы G называется $F(G)$*-субнормальной*, если H субнормальна в $HF(G)$. Группы с $F(G)$-субнормальными подгруппами исследовались в работах [19]–[21].

***Следствие* 3.3.** *Пусть G – разрешимая группа и каждая ее 2-максимальная подгруппа, содержащаяся в ненормальной максимальной подгруппе,* $F(G)$*-субнормальна. Тогда фактор-группа* $G/\Delta(G)$ *изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности,* $G/F(G)$ *– абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. По лемме 1.5 можно считать, что $\Phi(G)=\Delta(G)=1$, поэтому $F=F(G)$ – абелева подгруппа.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ – все ненормальные в G максимальные подгруппы, не содержащие F. Согласно лемме 1.3 $\bigcap_{i=1}^{n} M_i=\Delta(G)=1$.

Предположим, что существует подгруппа $M_j=M$ такая, что $HF<G$ для всех $H \lessdot M$. Ясно, что

$$G=MF, M\cap F \lhd G, M \not\leq HF,$$

$$M > M\cap HF = H(M\cap F)\geq H,$$

$$H(M\cap F)=H, M\cap F\leq H.$$

Поскольку это верно для всех $H \lessdot M$, то

$$M\cap F\leq \Phi(M).$$

Согласно [1, 3.22 (4)] $M\cap F\leq \Phi(G)=1$, поэтому

$$G=F\rtimes M, F\cdot \ \lhd G, M_G=1.$$

Пусть K – максимальная в M подгруппа и K нормальна в M. По условию подгруппа K субнормальна в KF, поэтому K нормальна в G и $K=1$. Значит, M – циклическая подгруппа простого порядка и G – группа типа A. Итак, в случае «существует подгруппа $M_j=M$ такая, что $HF<G$ для всех $H \lessdot M$» следствие доказано.

Осталось рассмотреть случай, когда в каждой подгруппе M_i существует подгруппа H_i такая, что $H_i \lessdot M_i$ и $FH_i=G$. По условию $H_i \lhd\lhd G$. Применяя теорему 2.1, получаем, что группа G изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности, $G/F(G)$ – абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York – Springer, 1967. – 793 p.

3. *Huppert*, *B*. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

4. *Луценко*, *Ю.В*. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, № 5. – С. 730–740.

5. *Горбатова*, *Ю.В*. Конечные группы с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Горбатова, М.Н. Коновалова // Вестник Омского университета. – 2019. – Т. 24, № 3. – С. 4–11.

6. *Monakhov*, V.S. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche Mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

7. *Kovaleva*, *V.A*. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 273–290.

8. *Монахов*, *В.С.* О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105, № 2. – С. 269–277.

9. Gaschütz, W. Über die Ф-Untergruppe endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – S. 160–170.

10. *Монахов*, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

11. *Монахов*, *В.С.* Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 81.

12. *Васильев*, *А.Ф.* Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыроквашин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 62–64.

13. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.

14. *Каргаполов*, *М.И.* Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

15. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. – Киев. – 2002, секция № 1. – С. 81–90.

16. *Fattahi*, *A*. Groups with only normal and abnormal subgroups / A. Fattahi // J. Algebra. – 1974. – Vol. 28, № 1. – P. 15–19.

17. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами / В.С. Монахов // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

18. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

19. *Мурашко*, *В.И.* О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2012. – Т. 70, № 4. – С. 24–27.

20. *Монахов*, В.С. Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 40–46.

21. *Васильев*, *А.Ф.* Формации и произведения $F(G)$-субнормальных подгрупп конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Матем. заметки. – 2020. – Т. 107, № 3. – Р. 376–390.

Поступила в редакцию 14.02.2020.