УДК 517.52

О СОВПАДЕНИИ ОБОБЩЁННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ НА НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE COINCIDENCE OF GENERALIZED SMOOTHNESS MODULES ON SOME CLASS OF FUNCTIONS

G.N. Kazimirov

F. Scorina Gomel State University

Доказывается совпадение обобщённых модулей гладкости k-го порядка, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига, с разными и одинаковыми сдвигами.

Ключевые слова*: оператор обобщённого сдвига, обобщённый модуль гладкости.*

The coincidence of generalized modules of smoothness of order k, determined with the help of the generalized shift operator, with different and identical shifts is proved.

Keywords*: generalized shift operator, generalized modulus of smoothness.*

Введение

Хорошо известны прямые и обратные теоремы теории приближений для 2π-периодических функций, в которых установлены связи между наилучшими приближениями и модулями гладкости этих функций. Такие же теоремы получены и для непериодических функций, однако в них, вместо обычного модуля гладкости, фигурирует обобщённый модуль гладкости, определяемый при помощи некоторого оператора обобщённого сдвига. Некоторые из таких операторов были предложены М.К. Потаповым [1]. Им же были доказаны прямые и обратные теоремы для модулей гладкости (модулей непрерывности) порядка $k = 1$. Для случая $k > 1$ эти теоремы получены Г.Н. Казимировым [2], [3]. Но в этих теоремах рассматриваются обобщённые модули гладкости, в которых обобщённые сдвиги берутся с разными шагами для каждой следующей обобщённой разности. Хотелось бы получить такие же теоремы и для обобщённых модулей, в которых каждая следующая разность берётся с одним и тем же шагом. В данной статье сделан первый шаг в этом направлении.

1 Используемые определения и леммы

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty,$$

а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1\le x\le 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что

$$f(x)(1-x)^\alpha (1-x)^\beta \in L_p$$

и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left\|f(x)(1-x)^\alpha (1-x)^\beta\right\|_p$.

Рассмотрим один из операторов обобщённого сдвига, предложенных в [1]. Положим

$$T_t(f,x) = \frac{1}{2}\Big[f(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\sin t)+ \\ +f(x\cos t-\sqrt{1-x^2}\sin t)\Big]. \tag{1.1}$$

Введём также обозначения:

$$\Delta_t^1(f,x) = T_t(f,x) - f(x),$$

$$\Delta^k_{t_1,\ldots,t_k}(f,x) = \Delta^1_{t_k}(\Delta^{k-1}_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(f,x),x),\ \ k = 2,3,\ldots,$$

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t_i|\le\delta, i=1,\ldots,k} \left\|\Delta^k_{t_1,\ldots,t_k}(f,x)\right\|_{p,\alpha,\beta},$$

$$\Delta^k_t(f,x) = \Delta^1_t(\Delta^{k-1}_t(f,x),x),\ k = 2,3,\ldots,$$

$$\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t|\le\delta} \left\|\Delta^k_t(f,x)\right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

***Лемма* 1.1.** *Пусть числа* p,α,β *такие, что*

$$1 \le p \le \infty,\ \ \alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$$

при $1 \le p < \infty$ и $\alpha = \beta = 0$ *при* $p = \infty$. *Тогда, если* $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, *то* $T_t(f,x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ *и*

$$\left\|T_t(f,x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C\|f\|_{p,\alpha,\beta},$$

где постоянная C *не зависит от* f *и* t.

Лемма 1.1 доказана в [1, с. 235–236].

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** *Пусть даны числа* p,α,β,k *такие, что* $1 \le p \le \infty$, $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2p}$ *при* $1 \le p < \infty$

и $\alpha=\beta=0$ *при* $p=\infty$, $k=1,2,3,\ldots$. *Пусть также* $f\in L_{p,\alpha,\beta}$. *Если существует функция* g, *такая, что*

$$\sup_{|t|\le\pi}|g(t)|<+\infty \text{ и } T_t(f,x)=f(x)g(t)$$
$$\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in[-\pi,\pi], \qquad (2.1)$$

то

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}=\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}.$$

Доказательство. Заметим, что $T_{-t}(f,x)=T_t(f,x)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $t\in[0,\pi]$. В силу Леммы 1.1 числа $\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ и $\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ существуют. В силу условия

$$\Delta_t^1(f,x)=f(x)g(t)-f(x)=f(x)(g(t)-1),$$
$$\Delta_t^k(f,x)=f(x)(g(t)-1)^k,$$
$$\Delta_{t_1,\ldots,t_k}^k(f,x)=f(x)(g(t_1)-1)\cdot\ldots\cdot(g(t_k)-1).$$

Тогда

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}=\sup_{0\le t_i\le\delta,}|g(t_1)-1|\cdot\ldots\cdot|g(t_k)-1|\|f\|_{p,\alpha,\beta},$$
$$i=1,\ldots,k,$$
$$\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}=\sup_{0\le t\le\delta}|g(t)-1|^k\|f\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Поскольку для $a\ge 0$

$$\sup_{a\le z\le b}z^k=\sup_{a\le z_i\le b}z_1\cdot\ldots\cdot z_k,\ i=1,\ldots,k,$$

то теорема доказана. □

***Пример* 2.1.** Пусть

$$f(x)=\cos(n\arccos x)=P_n(x)$$

полиномы Чебышёва. Тогда

$$T_t(P_n,x)=\frac{1}{2}\Big[P_n(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\sin t)+$$
$$+P_n(x\cos t-\sqrt{1-x^2}\sin t)\Big].$$

Положим $x=\cos\theta$. Если $\theta\in[0,\pi]$, то $x\in[-1,1]$. Поэтому

$$T_t(P_n,\cos\theta)=\frac{1}{2}\big[P_n(\cos(\theta-t))+P_n(\cos(\theta+t)\big]=$$
$$T_t(P_n,\cos\theta)=\frac{1}{2}\big[\cos n(\arccos(\cos(\theta-t)))+$$
$$+\cos n(\arccos(\cos(\theta+t)))\big].$$

Если $\theta-t,\theta+t\in[0,\pi]$, то

$$T_t(P_n,\cos\theta)=\frac{1}{2}\big[\cos n(\theta-t)+\cos n(\theta+t)\big]=$$
$$T_t(P_n,\cos\theta)=\cos n\theta\cdot\cos nt=P_n(\cos\theta)\cdot\cos nt,$$

или $T_t(P_n,x)=P_n(x)\cdot g(t)$, где $g(t)=\cos nt$.

Если $\theta+t\in[\pi,2\pi]$, то $2\pi-(\theta+t)\in[0,\pi]$ и $\cos(\theta+t)=\cos(2\pi-(\theta+t))$.

Поэтому $\arccos(\cos(\theta+t))=2\pi-(\theta+t)$. Следовательно

$$\cos n(\arccos(\cos(\theta+t)))=$$
$$=\cos(2\pi n-n(\theta+t))=\cos n(\theta+t).$$

Если $\theta-t\in[-\pi,0]$, то

$$\cos(\theta-t)=\cos(-(t-\theta))=\cos(t-\theta),$$

где $t-\theta\in[0,\pi]$.

Таким образом,

$$\cos n(\arccos(\cos(\theta-t)))=$$
$$=\cos(n(t-\theta))=\cos n(\theta-t).$$

Итак,

$$T_t(P_n,x)=P_n(x)\cdot g(t)\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in[0,\pi]$$

и $\sup\limits_{t\in[0,\pi]}|g(t)|=1<+\infty$.

***Пример* 2.2.** Положим $f(x)=\sin(n\arccos x)$. Так же, как и в примере 2.1, получаем

$$T_t(f,\cos\theta)=\frac{1}{2}\big[\sin n(\theta-t)+\sin n(\theta+t)\big]=$$
$$=\sin n\theta\cos nt,$$

или

$$T_t(f,x)=f(x)\cdot g(t)\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in[0,\pi].$$

Заключение

Таким образом, в статье доказано совпадение обобщённых модулей гладкости, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига вида (1.1), в которых обобщённые разности рассматриваются с разными и одинаковыми шагами для функций, удовлетворяющих условию (2.1). Примерами функций, удовлетворяющих условию (2.1), являются алгебраические многочлены Чебышёва и функции из примера 2.2, которые не являются многочленами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов*, *М.К.* Об условиях совпадения некоторых классов функций / М.К. Потапов // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6. – С. 223–238.

2. *Казимиров*, *Г.Н.* О теоремах Джексона для *k*-го обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, № 3054-В94.

3. *Казимиров*, *Г.Н.* Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 49–51.

Поступила в редакцию 29.04.2020.