Проблемы физики, математики и техники, № 1 (42), 2020

ФИЗИКА

УДК 539.12

О ПРОЯВЛЕНИИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА В МОДЕЛИ НЕЙТРАЛЬНОГО ФЕРМИОНА С ТРЕМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Я.А. Войнова[1], **Е.М. Овсиюк**[2]

[1]*Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси*
[2]*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина*

ON THE MANIFESTATION OF THE COSMOLOGICAL CURVATURE OF SPACE IN A MODEL OF A NEUTRAL FERMION WITH THREE MASS PARAMETERS

Ya.A. Voynova[1], **E.M. Ovsiyuk**[2]

[1]*B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus*
[2]*I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University*

Исследуется обобщенная модель фермиона со спином ½, который характеризуется тремя физическими массовыми параметрами M_i. Дополнительное взаимодействие определяется тензором внешнего электромагнитного поля и скалярной кривизной пространства-времени, оно связывает три биспинора в единую систему уравнений. Модель остается применимой и для нейтральных майорановских фермионов, при этом объединение трех биспиноров в единую систему обеспечивается ненулевой скалярной кривизной. Исследуется модельная ситуация, когда можно считать, что локально допустимо использование декартовых координат, а внешний геометрический фон можно эффективно учесть постоянным скаляром Риччи R. Для простоты ограничиваемся одномерным случаем (t, x). Используя диагонализацию матрицы смешивания в сложной системе уравнений, приводим задачу к трем раздельным уравнениям дираковского типа с новыми эффективными массами $\bar{M}_i$, значения которых определяются численно в зависимости от внутренних параметров модели и от величины кривизны пространства-времени. Приведен также численный анализ необходимых диагонализирующих преобразований S и S^{-1}. Решения трех раздельных уравнений майорановского типа строятся в базисе импульс-спиральность. Используя выражение для матриц преобразования S и S^{-1}, эти решения раскладываются в линейные комбинации по решениям с физическими массами и наоборот.

Ключевые слова: *фермион с тремя массовыми параметрами*, *майорановская частица*, *скалярная кривизна пространства-времени*, *уравнение Дирака*.

In this work a generalized fermion model with spin ½, which is characterized by three physical mass parameters M_i are studied. The additional interaction is determined by the tensor of the external electromagnetic field and the scalar space-time curvature. It joints three bispinors into one physical system. The model also remains valid for neutral Majorana fermions. The coupling of three bispinors into a single system is ensured by the nonzero scalar curvature of the space-time. We study a model situation where it can be assumed that locally the use of Cartesian coordinates is permissible, and the external geometric background can be effectively taken into account by a constant Ricci curvature R. For simplicity, we restrict ourselves to the one-dimensional case (t, x). Using the diagonalization of the mixing matrix in a complex system of equations, we reduce the problem to three separate Dirac-type equations with new effective masses $\bar{M}_i$, the values of which are determined numerically depending on the internal parameter of the model and the space-time curvature. A numerical analysis of the necessary diagonalizing transformations S and S^{-1} is given. The solutions of three separate equations of the Majorana type are constructed in the momentum–helicity basis. Using the expression for the transformation matrices S and S^{-1}, these solutions are decomposed into linear combinations by solutions with physical masses and vice versa.

Keywords: *fermion with three mass parameters*, *Majorana particle*, *of space-time scalar curvature*, *Dirac equation.*

1 Модель обобщенного фермиона

Хорошо известна возможность вместо простейших уравнений для элементарных частиц (Клейна – Фока – Города, Дирака, Даффина – Кеммера, Паули – Фирца, Рариты – Швингера и др.) построить более сложные уравнения, которые могут описывать частицы с несколькими спинами, несколькими массами, с дополнительными электромагнитными характеристиками (аномальным магнитным моментом, электрическим квадрупольным моментом, поляризуемостью, структурой Дарвина – Кокса и др.). Все эти обобщенные модели строятся на основе общего теоретического подхода, созданного Гельфандом и Ягломом [1]–[61].

В частности, в работе [62] была предложена обобщенная модель фермиона со спином ½, который характеризуется тремя массовыми параметрами. Будем исходить из найденной формы уравнения для такой сложной частицы в присутствии внешних электромагнитных и гравитационных полей:

$$i\gamma^{\alpha}(x)[\partial_{\alpha}+\Gamma_{\alpha}(x)+ieA_{\alpha}(x)]\Phi_1(x)-$$
$$-M_1\Phi_1(x)+Y_1\,\Sigma(x)\Phi(x)=0,$$
$$i\gamma^{\alpha}(x)[\partial_{\alpha}+\Gamma_{\alpha}(x)+ieA_{\alpha}(x)]\Phi_2(x)- \qquad (1.1)$$

© *Войнова Я.А.*, *Овсиюк Е.М.*, 2020

$$-M_2\Phi_2(x)+Y_2\ \Sigma(x)\Phi(x)=0,$$
$$i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha+\Gamma_\alpha(x)+ieA_\alpha(x)]\Phi_3(x)-$$
$$-M_3\Phi_3(x)+Y_3\ \Sigma(x)\Phi(x)=0,$$

где (см. обозначения в [62])

$$Y_i=\frac{4c_3}{3M}c_2(\lambda_i-c_2),$$
$$\Phi(x)=L_1\Phi_1(x)+L_2\Phi_2(x)+L_3\Phi_3(x).$$

Поскольку в (1.1) дополнительное взаимодействие определяется тензором внешнего электромагнитного поля и скалярной кривизной пространства-времени:

$$\Sigma(x)=-ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x)+\frac{R(x)}{4},$$

то в моделях с $R(x)\neq 0$ даже в отсутствие внешнего электромагнитного поля обобщенная система уравнений объединяет три биспинора в единую физическую систему:

$$\begin{gathered}i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha+\Gamma_\alpha(x)]\Phi_1(x)-\\-M_1\Phi_1(x)+Y_1\frac{R(x)}{4}\Phi(x)=0,\\i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha+\Gamma_\alpha(x)]\Phi_2(x)-\\-M_2\Phi_2(x)+Y_2\frac{R(x)}{4}\Phi(x)=0,\\i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha+\Gamma_\alpha(x)]\Phi_3(x)-\\-M_3\Phi_3(x)+Y_3\frac{R(x)}{4}\Phi(x)=0.\end{gathered}\qquad(1.2)$$

Ввиду того, что в любом майорановском базисе выполняются равенства

$$[i\gamma^\alpha(x)]^*=i\gamma^\alpha(x),\ \Gamma^*_\alpha(x)=\Gamma_\alpha(x),$$

система (1.2) допускает ограничение к случаю вещественных и чисто мнимых биспиноров, т. е. к случаю майорановских частиц с тремя массовыми параметрами.

2 Учет постоянной скалярной кривизны

Развитая теория делает возможным учесть влияние космологической структуры пространства-времени на такой майорановский фермион. Простейшей ситуацией является следующая: можно считать, что локально, например, у поверхности Земли, допустимо использование декартовых координат, а внешний геометрический фон можно эффективно учесть ненулевым постоянным скаляром Риччи R, который можно варьировать в широких пределах. Для простоты ограничимся (хотя это не существенно) одномерным случаем $(t,\ x, y=0,\ z=0)$.

Следовательно, будем исходить из уравнений

$$\begin{gathered}(i\gamma^0\partial_t+i\gamma^1\partial_1-M_1)\Phi_1+d_1(L_1\Phi_1+L_2\Phi_2+L_3\Phi_3)=0,\\(i\gamma^0\partial_t+i\gamma^1\partial_1-M_2)\Phi_2+d_2(L_1\Phi_1+L_2\Phi_2+L_3\Phi_3)=0,\\(i\gamma^0\partial_t+i\gamma^1\partial_1-M_3)\Phi_3+\\+d_3(L_1\Phi_1+L_2\Phi_2+L_3\Phi_3)=0;\end{gathered}\qquad(2.1)$$

в (2.1) использовано обозначение $d_i=Y_i(R/4)$.

Система (2.1) может быть представлена в матричном виде

$$(i\gamma^0\partial_t+i\gamma^1\partial_1-M)\begin{vmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\\\Phi_3\end{vmatrix}=\qquad(2.2)$$

$$=-\begin{vmatrix}(M-M_1+d_1L_1)&d_1L_2&d_1L_3\\d_2L_1&(M-M_2+d_2L_2)&d_2L_3\\d_3L_1&d_3L_2&(M-M_3+d_3L_3)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\\\Phi_3\end{vmatrix},$$

или кратко

$$\Delta\,\Phi=T\,\Phi,\ \ \Delta=-(i\gamma^0\partial_t+i\gamma^1\partial_1-M),\qquad(2.3)$$

где смешивающая матрица T задается равенством

$$T=\begin{vmatrix}(M-M_1+d_1L_1)&d_1L_2&d_1L_3\\d_2L_1&(M-M_2+d_2L_2)&d_2L_3\\d_3L_1&d_3L_2&(M-M_3+d_3L_3)\end{vmatrix}.$$

Подвергнем трехмерный столбец Φ биспиноров из (2.2)–(2.3) линейному преобразованию, приводящему матрицу T к диагональному виду:

$$\bar\Phi=S\Phi,\ \ \Delta\bar\Phi=(STS^{-1})\,\bar\Phi,$$

$$STS^{-1}=T_0=\begin{vmatrix}\mu_1&0&0\\0&\mu_2&0\\0&0&\mu_3\end{vmatrix}.$$

В результате будем иметь раздельные уравнения для новых биспиноров:

$$[i\gamma^0\partial_t+i\gamma^1\partial_1-\bar M_1]\,\bar\Phi_1=0,\ \ \bar M_1=M+\mu_1,$$
$$[i\gamma^0\partial_t+i\gamma^1\partial_1-\bar M_2]\,\bar\Phi_2=0,\ \ \bar M_2=M+\mu_2,$$
$$[i\gamma^0\partial_t+i\gamma^1\partial_1-\bar M_3]\,\bar\Phi_3=0,\ \ \bar M_3=M+\mu_3.$$

Из физических соображений нужно предполагать, что все три собственных значения μ_i будут вещественными. Чтобы найти матрицу S, обращаемся к уравнению $ST=T_0S$, которое дает

$$\begin{vmatrix}s_{11}&s_{12}&s_{13}\\s_{21}&s_{22}&s_{23}\\s_{31}&s_{32}&s_{33}\end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}(M-M_1+d_1L_1)&d_1L_2&d_1L_3\\d_2L_1&(M-M_2+d_2L_2)&d_2L_3\\d_3L_1&d_3L_2&(M-M_3+d_3L_3)\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mu_1&0&0\\0&\mu_2&0\\0&0&\mu_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}s_{11}&s_{12}&s_{13}\\s_{21}&s_{22}&s_{23}\\s_{31}&s_{32}&s_{33}\end{vmatrix},$$

отсюда получаем три подсистемы по три уравнения в каждой:

$$\begin{gathered}(M-M_1+d_1L_1)s_{11}+d_2L_1s_{12}+d_3L_1s_{13}=\mu_1s_{11},\\d_1L_2s_{11}+(M-M_2+d_2L_2)s_{12}+d_3L_2s_{13}=\mu_1s_{12},\\d_1L_3s_{11}+d_2L_3s_{12}+(M-M_3+d_3L_3)s_{13}=\mu_1s_{13};\end{gathered}\qquad(2.4)$$

$$\begin{gathered}(M-M_1+d_1L_1)s_{21}+d_2L_1s_{22}+d_3L_1s_{23}=\mu_2s_{21},\\d_1L_2s_{21}+(M-M_2+d_2L_2)s_{22}+d_3L_2s_{23}=\mu_2s_{22},\\d_1L_3s_{21}+d_2L_3s_{22}+(M-M_3+d_3L_3)s_{23}=\mu_2s_{23};\end{gathered}\qquad(2.5)$$

$$(M - M_1 + d_1L_1)s_{31} + d_2L_1s_{32} + d_3L_1s_{33} = \mu_3 s_{31},$$
$$d_1L_2s_{31} + (M - M_2 + d_2L_2)s_{32} + d_3L_2s_{33} = \mu_3 s_{32},$$
$$d_1L_3s_{31} + d_2L_3s_{32} + (M - M_3 + d_3L_3)s_{33} = \mu_3 s_{33}. \quad (2.6)$$

Здесь имеем три задачи на собственные значения:

$$\begin{vmatrix} M - M_1 + d_1L_1 - \mu_1 & d_2L_1 & d_3L_1 \\ d_1L_2 & M - M_2 + d_2L_2 - \mu_1 & d_3L_2 \\ d_1L_3 & d_2L_3 & M - M_3 + d_3L_3 - \mu_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} M - M_1 + d_1L_1 - \mu_2 & d_2L_1 & d_3L_1 \\ d_1L_2 & M - M_2 + d_2L_2 - \mu_2 & d_3L_2 \\ d_1L_3 & d_2L_3 & M - M_3 + d_3L_3 - \mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} M - M_1 + d_1L_1 - \mu_3 & d_2L_1 & d_3L_1 \\ d_1L_2 & M - M_2 + d_2L_2 - \mu_3 & d_3L_2 \\ d_1L_3 & d_2L_3 & M - M_3 + d_3L_3 - \mu_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{31} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Отметим, что строки матрицы S восстанавливаются только с точностью до произвольных множителей. Условием существования решений у этих трех систем является равенство нулю определителя

$$\det \begin{vmatrix} M - M_1 + d_1L_1 - \mu & d_2L_1 & d_3L_1 \\ d_1L_2 & M - M_2 + d_2L_2 - \mu & d_3L_2 \\ d_1L_3 & d_2L_3 & M - M_3 + d_3L_3 - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Получим явный вид уравнения 3-й степени для μ:

$$-\mu^3 + \big(3M - M_1 - M_2 - M_3 + d_1L_1 + d_2L_2 + d_3L_3\big)\mu^2 +$$
$$+\big[-L_1d_1(2M - M_2 - M_3) - d_2L_2(2M - M_1 - M_3) - d_3L_3(2M - M_2 - M_1) -$$
$$-3M^2 + 2(M_1 + M_2 + M_3)M - (M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3)\big]\mu +$$
$$+L_1d_1(M - M_2)(M - M_3) + L_2d_2(M - M_3)(M - M_1) +$$
$$+L_3d_3(M - M_1)(M - M_2) + (M - M_1)(M - M_2)(M - M_3) = 0.$$

Это представление можно преобразовать в следующее (учтем $M_i = M/\lambda_i$):

$$-\mu^3 + \left[M\left(3 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3}\right) + L_1d_1 + L_2d_2 + L_3d_3\right]\mu^2 +$$
$$+\left[-ML_1d_1\left(2 - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3}\right) - ML_2d_2\left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3}\right) - ML_3d_3\left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) -\right.$$
$$-3M^2 + 2M^2\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right) -$$
$$\left.-M^2\left(\frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2}\frac{1}{\lambda_3}\right)\right]\mu +$$
$$+\left[M^2L_1d_1\left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda_3}\right) + M^2L_2d_2\left(1 - \frac{1}{\lambda_3}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) +\right.$$
$$+M^2L_3d_3\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) +$$
$$\left.+M^3\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda_3}\right)\right] = 0. \quad (2.7)$$

Детализируем явный вид элементов матрицы T. Сначала учтем, что параметризацию возможных значений трех массовых параметров $M/\lambda_i = M_i$ можно значительно упростить. Напомним, что корни λ_i являются решениями характеристического уравнения [62]

$$\lambda^3 - (c_1 + c_2)\lambda^2 + (c_1c_2 + a^2 + b^2)\lambda - (c_1a^2 + c_2b^2) = 0,$$

где $c_3 = b > 0$, $c_4 = a > 0$. Находим выражения для λ_1, λ_2 через λ_3:

$$\lambda_1 = \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3}},$$
$$\lambda_2 = \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3}}.$$

Значение корня λ_3 несущественно, поскольку физически значимым параметром является $M_3 = M/\lambda_3$, при этом M произвольная величина. Наиболее простое выражение для λ_3 получается при $c_1 = c_2 = 1$; при этом кубическое уравнение и его корни значительно упрощаются

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + (1 + k)\lambda - k = 0, \quad k = a^2 + b^2,$$
$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4k},$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4k}, \quad k \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Соответственно массы M_i равны

$$M_3 = M,\ M_1 = \frac{2M}{1-\sqrt{1-4k}},$$
$$M_2 = \frac{2M}{1+\sqrt{1-4k}},\ k \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Построим таблицы значений для $\lambda_i^{-1} = M_i / M$ в зависимости от значений параметра k:

$k = 0.25,\quad 1/\lambda_1 = 2.000,\quad 1/\lambda_2 = 2.000,\ 1/\lambda_3 = 1;$
$k = 0.23,\quad 1/\lambda_1 = 2.786,\quad 1/\lambda_2 = 1.560,\ 1/\lambda_3 = 1;$
$k = 0.21,\quad 1/\lambda_1 = 3.333,\quad 1/\lambda_2 = 1.429,\ 1/\lambda_3 = 1;$
$k = 0.20,\quad 1/\lambda_1 = 3.623,\quad 1/\lambda_2 = 1.381,\ 1/\lambda_3 = 1;$
$k = 0.16,\quad 1/\lambda_1 = 5.000,\quad 1/\lambda_2 = 1.250,\ 1/\lambda_3 = 1;$
$k = 0.12,\quad 1/\lambda_1 = 7.194,\quad 1/\lambda_2 = 1.161,\ 1/\lambda_3 = 1;$
$k = 0.08,\ 1/\lambda_1 = 11.364,\quad 1/\lambda_2 = 1.096,\ 1/\lambda_3 = 1;$
$k = 0.04,\ 1/\lambda_1 = 23.810,\quad 1/\lambda_2 = 1.044,\ 1/\lambda_3 = 1;$
$k = 0.01,\ 1/\lambda_1 = 100.000,\ 1/\lambda_2 = 1.011,\ 1/\lambda_3 = 1.$

Детализируем коэффициенты L_i (см. [62])

$$\Phi(x) = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x)$$

(учитываем, что $\lambda_3 = 1$)

$$L_1 = \frac{1}{b}\frac{1}{(\lambda_1-1)(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{-2k + \frac{1}{2L}(-1+2\lambda_2)\right\},$$
$$L_2 = \frac{1}{b}\frac{1}{(\lambda_2-1)(\lambda_2-\lambda_1)}\left\{-2k + \frac{1}{2L}(-1+2\lambda_1)\right\},$$
$$L_3 = \frac{1}{b}\frac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\times$$
$$\times\left\{-2k + \frac{1}{2L}(1-2\lambda_1-2\lambda_2+4\lambda_1\lambda_2)\right\}, \qquad (2.8)$$

где

$$L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}},\ a^2+b^2 = k < \frac{1}{4},\ 0 < 2b < 1.$$

Детализируем коэффициенты d_i:

$$d_1 = \frac{Rb}{6M}\left(\lambda_1 - \frac{1}{2}\right),\ d_2 = \frac{Rb}{6M}\left(\lambda_2 - \frac{1}{2}\right),$$
$$d_3 = \frac{Rb}{6M}\left(\lambda_3 - \frac{1}{2}\right). \qquad (2.9)$$

В матрице смешивания возникают комбинации d_iL_j, поэтому параметр b в знаменателях из (2.8) будет сокращаться с параметром b из (2.9). Поскольку размерность скалярной кривизны R – это M^2 (обратный квадратный метр), то можно ввести подстановки

$$R = 6rM^2 \Rightarrow$$
$$d_i = \frac{Rb}{6M}\left(\lambda_i - \frac{1}{2}\right) = M\cdot rb\left(\lambda_i - \frac{1}{2}\right) = M\cdot D_i,$$

величины D_i – безразмерные. С учетом этого кубическое уравнение (2.7) переписывается в более простом виде (корни можно искать в виде $\mu_i = M\Delta_i$, где Δ_i – безразмерные величины; учитываем, что $\lambda_3 = 1$)

$$\Delta^3 + \left[2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + L_1D_1 + L_2D_2 + L_3D_3\right]\Delta^2 +$$
$$+\left[L_1D_1\left(1-\frac{1}{\lambda_2}\right) + L_2D_2\left(1-\frac{1}{\lambda_1}\right) +\right.$$
$$+L_3D_3\left(2-\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)+$$
$$\left.+3-2\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+1\right)+\left(\frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\right]\Delta -$$
$$-L_3D_3\left(1-\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1-\frac{1}{\lambda_2}\right) = 0.$$

Замечаем, что параметр b входит множителем в D_1, D_2, D_3 и входит в множитель в знаменатели выражений для коэффициентов L_1, L_2, L_3. Поэтому в комбинациях

$$L_1D_1 + L_2D_2 + L_3D_3,\ L_1D_1,\ L_2D_2,\ L_3D_3$$

этот параметр сокращается. С учетом этого, опускаем этот множитель в выражениях для L_i и D_i. Тогда имеем

$$L_1 = \frac{1}{(\lambda_1-1)(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{-2k + \frac{1}{2L}(2\lambda_2-1)\right\},$$
$$L_2 = \frac{1}{(\lambda_2-1)(\lambda_2-\lambda_1)}\left\{-2k + \frac{1}{2L}(2\lambda_1-1)\right\},$$
$$L_3 = \frac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\left\{-2k + \frac{1}{2L}(1-2\lambda_1-2\lambda_2+4\lambda_1\lambda_2)\right\},$$
$$D_1 = \frac{r}{2}(2\lambda_1-1),\ D_2 = \frac{r}{2}(2\lambda_2-1),\ D_3 = \frac{r}{2},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4k},\ \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4k},\ k \in \left(0, \frac{1}{4}\right),$$
$$L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}},\ (a^2+b^2) = k < \frac{1}{4}.$$

Учитывая тождества

$$2\lambda_1 - 1 = -\sqrt{1-4k},\ 2\lambda_2 - 1 = +\sqrt{1-4k},$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 = -\sqrt{1-4k},\ \lambda_2 - \lambda_1 = +\sqrt{1-4k},$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 - 1 = -\lambda_2,\ \lambda_2 - 1 = -\lambda_1,$$
$$1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2 = 4k - 1,\ \lambda_1\lambda_2 = k,$$

получаем более простые выражения для коэффициентов

$$L_1 = \frac{2}{(1+\sqrt{1-4k})\sqrt{1-4k}}\left\{-2k + \frac{1}{2L}\sqrt{1-4k}\right\},$$
$$L_2 = \frac{2}{(1-\sqrt{1-4k})\sqrt{1-4k}}\left\{+2k + \frac{1}{2L}\sqrt{1-4k}\right\},$$
$$L_3 = \frac{1}{k}\left\{-2k + \frac{1}{2L}(4k-1)\right\},$$
$$D_1 = -\frac{r}{2}\sqrt{1-4k},\ D_2 = +\frac{r}{2}\sqrt{1-4k},$$

$$D_3 = \frac{r}{2}, \ L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}}, \ 0 < 2b < 1.$$

Кубическое уравнение относительно Δ запишем в виде

$$\Delta^3 + A\Delta^2 + B\Delta + C = 0,$$

где коэффициенты с учетом свойств корней λ_1, λ_2 равны

$$A = 2 - \frac{1}{k} + L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3, \ C = L_3 D_3,$$

$$B = -L_1 D_1 \frac{1-\sqrt{1-4k}}{1+\sqrt{1-4k}} - L_2 D_2 \frac{1+\sqrt{1-4k}}{1-\sqrt{1-4k}} + $$
$$+ L_3 D_3 \left(2 - \frac{1}{k}\right) + 1.$$

Найдем выражения для величин

$$L_1 D_1 = \frac{2k - l\sqrt{1-4k}}{1+\sqrt{1-4k}} r,$$

$$L_2 D_2 = \frac{2k + l\sqrt{1-4k}}{1-\sqrt{1-4k}} r,$$

$$L_3 D_3 = -\left(1 + l\frac{1-4k}{2k}\right) r.$$

В результате всех преобразований получаем простое представление для уравнения

$$\Delta^3 + \frac{2k-1}{k}\Delta^2 + \left[1 + \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{6}+b)} \frac{1-4k}{2k}\right) r\right]\Delta +$$
$$+ \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{6}+b)} \frac{1-4k}{2k}\right) r = 0, \qquad (2.10)$$

$$0 < k < \frac{1}{4}, \ 0 < b < 2, \text{ пусть } b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2.$$

Поскольку после линейного преобразования имеем три уравнения дираковского типа

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^1 \partial_1 - M(1+\Delta_i)\right] \overline{F}_i = 0,$$

то следует ожидать, что три новых массовых параметра $M(1+\Delta_i)$ будут вещественными и положительными.

Напомним, что параметр r был введен соотношением $R = 6rM^2$. С учетом того, что гравитация должна искажать массовые параметры незначительно, следует предполагать безразмерный параметр r достаточно малым. Кроме того, возможны две физически разные возможности: $r > 0$ при положительной кривизне и $r < 0$ при отрицательной кривизне. Мы проследим за несколькими ситуациями слабой и сильной гравитации:

$$r = +10^{-30}, r = +10^{-5}, r = +10^{-3}, r = +10^{-2}, r = +1;$$

$$r = -10^{-30}, r = -10^{-5}, r = -10^{-3}, r = -10^{-2}, r = -1;$$

последний случай $|r| = 1$ следует относить к очень сильному искривлению пространства.

Построим несколько таблиц значений для корней Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$b = 2, \ r = +10^{-30},$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.667, \Delta_2 = 1.500, \Delta_3 = -1.023 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.20, \Delta_1 = 0.382, \Delta_2 = 2.618, \Delta_3 = -1.138 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.16, \Delta_1 = 0.250, \Delta_2 = 4.000, \Delta_3 = -1.310 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.162, \Delta_2 = 6.171, \Delta_3 = -1.596 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.08, \Delta_1 = 0.096, \Delta_2 = 10.404, \Delta_3 = -2.170 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.04, \Delta_1 = 0.044, \Delta_2 = 22.956, \Delta_3 = -3.890 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.02, \Delta_1 = 0.021, \Delta_2 = 47.979, \Delta_3 = -7.331 \cdot 10^{-30};$$

$$b = 0, \ r = +10^{-30},$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.667, \Delta_2 = 1.500, \Delta_3 = -1.042 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.18, \Delta_1 = 0.308, \Delta_2 = 3.248, \Delta_3 = -1.389 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.14, \Delta_1 = 0.202, \Delta_2 = 4.940, \Delta_3 = -1.786 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.10, \Delta_1 = 0.127, \Delta_2 = 7.873, \Delta_3 = -2.500 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.06, \Delta_1 = 0.069, \Delta_2 = 14.598, \Delta_3 = -4.167 \cdot 10^{-30};$$
$$k = 0.02, \Delta_1 = 0.021, \Delta_2 = 47.979, \Delta_3 = -1.250 \cdot 10^{-29}.$$

Отмечаем, что зависимость корней Δ_i от параметра $b \in (0, 2)$ очень слабая, поэтому дальше используем только значение $b = 0$.

Пусть кривизна отрицательная

$$b = 0, \ r = -10^{-30},$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 1.042 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.667, \Delta_3 = 1.500;$$
$$k = 0.20, \Delta_1 = 1.250 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.382, \Delta_3 = 2.618;$$
$$k = 0.16, \Delta_1 = 1.563 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.250, \Delta_3 = 4.000;$$
$$k = 0.12, \Delta_1 = 2.083 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.162, \Delta_3 = 6.171;$$
$$k = 0.08, \Delta_1 = 3.125 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.096, \Delta_3 = 10.404;$$
$$k = 0.04, \Delta_1 = 6.250 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.044, \Delta_3 = 22.956.$$

Увеличим кривизну пространства $b = 0, r = +10^{-5}$,

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.667, \Delta_2 = 1.500, \Delta_3 = -0.00001;$$
$$k = 0.20, \Delta_1 = 0.382, \Delta_2 = 2.618, \Delta_3 = -0.00001;$$
$$k = 0.16, \Delta_1 = 0.250, \Delta_2 = 3.999, \Delta_3 = -0.00002;$$
$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.162, \Delta_2 = 6.171, \Delta_3 = -0.00002;$$
$$k = 0.08, \Delta_1 = 0.096, \Delta_2 = 10.404, \Delta_3 = -0.00003;$$
$$k = 0.04, \Delta_1 = 0.044, \Delta_2 = 22.956, \Delta_3 = -0.00006.$$

Пусть $b = 0, \ r = -10^{-5}$,

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.0000104, \Delta_2 = 0.667, \Delta_3 = 1.500;$$
$$k = 0.20, \Delta_1 = 0.0000125, \Delta_2 = 0.382, \Delta_3 = 2.618;$$
$$k = 0.16, \Delta_1 = 0.0000156, \Delta_2 = 0.250, \Delta_3 = 4.000;$$
$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.0000208, \Delta_2 = 0.162, \Delta_3 = 6.171;$$
$$k = 0.08, \Delta_1 = 0.0000313, \Delta_2 = 0.096, \Delta_3 = 10.404;$$
$$k = 0.04, \Delta_1 = 0.0000626, \Delta_2 = 0.043, \Delta_3 = 22.956.$$

Отмечаем закономерность: с ростом кривизны примерно до величины $|r| = 10^{-5}$ при смене знака кривизны два корня из трех остаются практически теми же, а третий корень меняет знак (нумерация корней цифрами несущественна).

Увеличиваем кривизну дальше:

$$b = 0, \quad r = +10^{-3},$$

$$k = 0.24, \quad \Delta_1 = 0.670, \quad \Delta_2 = 1.489, \quad \Delta_3 = -0.001;$$
$$k = 0.20, \quad \Delta_1 = 0.384, \quad \Delta_2 = 2.617, \quad \Delta_3 = -0.001;$$
$$k = 0.16, \quad \Delta_1 = 0.252, \quad \Delta_2 = 3.999, \quad \Delta_3 = -0.002;$$
$$k = 0.12, \quad \Delta_1 = 0.164, \quad \Delta_2 = 6.171, \quad \Delta_3 = -0.002;$$
$$k = 0.08, \quad \Delta_1 = 0.099, \quad \Delta_2 = 10.404, \quad \Delta_3 = -0.003;$$
$$k = 0.04, \quad \Delta_1 = 0.049, \quad \Delta_2 = 22.957, \quad \Delta_3 = -0.005.$$

$$b = 0, \quad r = -10^{-3},$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.001, \Delta_2 = 0.664, \Delta_3 = 1.502;$$
$$k = 0.20, \Delta_1 = 0.001, \Delta_2 = 0.380, \Delta_3 = 2.497;$$
$$k = 0.16, \Delta_1 = 0.002, \Delta_2 = 0.248, \Delta_3 = 4.000;$$
$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.002, \Delta_2 = 0.160, \Delta_3 = 6.171;$$
$$k = 0.08, \Delta_1 = 0.003, \Delta_2 = 0.093, \Delta_3 = 10.404;$$
$$k = 0.04, \Delta_1 = 0.008, \Delta_2 = 0.036, \Delta_3 = 22.956;$$
$$k = 0.02, \Delta_1 = 47.979, \Delta_2 = 0.0105 + 0.0122i, \quad \Delta_3 = 0.0105 - 0.0122i;$$
$$k = 0.01, \Delta_1 = 97.990, \Delta_2 = 0.005 + 0.015i, \quad \Delta_3 = 0.005 - 0.015i.$$

Замечаем, что при этой кривизне отмеченная закономерность уже не выполняется: при смене знака кривизны все три корня в общем меняются, при этом один из корней меняет и знак.

Увеличим кривизну еще больше.

$$b = 0, \quad r = +10^{-2},$$

$$k = 0.24, \quad \Delta_1 = 0.697, \quad \Delta_2 = 1.480, \quad \Delta_3 = -0.010;$$
$$k = 0.20, \quad \Delta_1 = 0.399, \quad \Delta_2 = 2.613, \quad \Delta_3 = -0.012;$$
$$k = 0.16, \quad \Delta_1 = 0.267, \quad \Delta_2 = 3.998, \quad \Delta_3 = -0.015;$$
$$k = 0.12, \quad \Delta_1 = 0.181, \quad \Delta_2 = 6.171, \quad \Delta_3 = -0.019;$$
$$k = 0.08, \quad \Delta_1 = 0.120, \quad \Delta_2 = 10.405, \quad \Delta_3 = -0.025;$$
$$k = 0.04, \quad \Delta_1 = 0.077, \quad \Delta_2 = 22.958, \quad \Delta_3 = -0.035;$$
$$k = 0.02, \quad \Delta_1 = 0.061, \quad \Delta_2 = 47.981, \quad \Delta_3 = -0.043;$$
$$k = 0.01, \quad \Delta_1 = 0.055, \quad \Delta_2 = 97.992, \quad \Delta_3 = -0.047;$$

$$b = 0, \quad r = -10^{-2},$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.011, \Delta_2 = 0.637, \Delta_3 = 1.519;$$
$$k = 0.20, \Delta_1 = 0.013, \Delta_2 = 0.363, \Delta_3 = 2.624;$$
$$k = 0.16, \Delta_1 = 0.017, \Delta_2 = 0.231, \Delta_3 = 4.002;$$
$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.025, \Delta_2 = 0.137, \Delta_3 = 6.172;$$
$$k = 0.10, \Delta_1 = 0.034, \Delta_2 = 0.093, \Delta_3 = 7.873;$$
$$k = 0.08, \Delta_1 = 10.403, \Delta_2 = 0.485 + 0.256i, \quad \Delta_3 = 0.485 - 0.256i;$$
$$k = 0.06, \Delta_1 = 14.597, \Delta_2 = 0.349 + 0.405i, \quad \Delta_3 = 0.349 - 0.405i;$$
$$k = 0.04, \Delta_1 = 22.955, \Delta_2 = 0.226 + 0.470i, \quad \Delta_3 = 0.226 - 0.470i;$$
$$k = 0.02, \Delta_1 = 47.977, \Delta_2 = 0.115 + 0.497i, \quad \Delta_3 = 0.115 - 0.497i;$$
$$k = 0.01, \Delta_1 = 97.987, \Delta_2 = 0.626 + 0.501i, \quad \Delta_3 = 0.626 - 0.501i.$$

Отмечаем, что при положительной кривизне все корни вещественны, а при отрицательной кривизне некоторые корни становятся комплексными, что указывает на недопустимость такой величины отрицательной кривизны в рамках рассматриваемой модели.

Наконец при еще большем увеличении кривизны корни становятся комплексными при обоих знаках кривизны: $b = 0, \ r = +1,$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 1.265 + 1.129i, \Delta_2 = -0.362, \quad \Delta_3 = 1.265 - 1.129i;$$
$$k = 0.209, \Delta_1 = 1.588 + 0.726i, \Delta_2 = -0.392, \quad \Delta_3 = 1.588 - 0.726i;$$
$$k = 0.206, \Delta_1 = 1.625 + 0.656i, \Delta_2 = -0.395, \quad \Delta_3 = 1.625 - 0.656i;$$
$$k = 0.203, \Delta_1 = 1.662 + 0.574i, \Delta_2 = -0.398, \quad \Delta_3 = 1.662 - 0.574i;$$
$$k = 0.18, \Delta_1 = 1.173, \Delta_2 = 2.804, \Delta_3 = -0.422;$$
$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.695, \Delta_2 = 6.128, \Delta_3 = -0.489;$$
$$k = 0.06, \Delta_1 = 0.503, \Delta_2 = 14.727, \Delta_3 = -0.563;$$
$$k = 0.01, \Delta_1 = 0.406, \Delta_2 = 98.221, \Delta_3 = -0.627.$$

$$b = 0, \quad r = -1,$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 2.339, \Delta_2 = -0.863 + 0.662i, \quad \Delta_3 = -0.863 - 0.662i;$$
$$k = 0.209, \Delta_1 = 2.862, \Delta_2 = -0.387 + 0.645i, \quad \Delta_3 = -0.387 - 0.645i;$$
$$k = 0.206, \Delta_1 = 2.923, \Delta_2 = -0.345 + 0.643i, \quad \Delta_3 = -0.345 - 0.643i;$$
$$k = 0.203, \Delta_1 = 2.987, \Delta_2 = -0.303 + 0.6414i, \quad \Delta_3 = -0.303 - 0.6414i;$$
$$k = 0.18, \Delta_1 = 3.556, \Delta_2 = -0.237 + 0.625i, \quad \Delta_3 = -0.237 - 0.625i;$$
$$k = 0.12, \Delta_1 = 6.213, \Delta_2 = 0.602 + 0.5759i, \quad \Delta_3 = 0.602 - 0.5759i;$$
$$k = 0.06, \Delta_1 = 14.468, \Delta_2 = 0.995 + 0.527i, \quad \Delta_3 = 0.995 - 0.527i;$$
$$k = 0.01, \Delta_1 = 97.757, \Delta_2 = 0.121 + 0.491i, \quad \Delta_3 = 0.121 - 0.491i.$$

Таким образом, на границе величины кривизны около $r = \pm 10^{-2}$ появляются комплексные корни. Это означает, что при сильной кривизне теория становится не интерпретируемой.

3 Явный вид диагонализирующих преобразований

Теперь рассмотрим вопрос о явном представлении преобразований S, с помощью которых достигается диагонализация системы уравнений (2.1). Поскольку строки матриц S находятся с точностью до множителей, то можно искать эти матрицы в виде

$$\bar{\Phi}_i = S_{ij}\Phi_j,\ S = \begin{vmatrix} s_{(1)1} & s_{(1)2} & 1 \\ s_{(2)1} & s_{(2)2} & 1 \\ s_{(3)1} & s_{(3)2} & 1 \end{vmatrix},\ s_{13} = s_{23} = s_{33} = +1.$$

Соответственно, возвращаясь к системам (2.4)–(2.6), отбрасываем в каждой из них третье уравнение. При этом получим три неоднородные системы по два уравнения в каждой, которые определяют строки (1), (2), (3):

$$(M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_{(1)})\cdot s_{(1)1} + d_2 L_1 \cdot s_{(1)2} = -d_3 L_1,$$
$$d_1 L_2 \cdot s_{(1)1} + (M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_{(1)})\cdot s_{(1)2} = -d_3 L_2;$$
$$(M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_{(2)})\cdot s_{(2)1} + d_2 L_1 \cdot s_{(2)2} = -d_3 L_1,$$
$$d_1 L_2 \cdot s_{(2)1} + (M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_{(2)})\cdot s_{(2)2} = -d_3 L_2;$$
$$(M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_{(3)})\cdot s_{(3)1} + d_2 L_1 \cdot s_{(3)2} = -d_3 L_1,$$
$$d_1 L_2 \cdot s_{(3)1} + (M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_{(3)})\cdot s_{(3_2} = -d_3 L_2.$$

Приведем выражения для величин D_i и L_j (поскольку множители b^{-1} и b компенсируют друг друга в произведениях $D_i L_j$, мы их опускаем):

$$L_1 = \frac{2}{(1+\sqrt{1-4k})\sqrt{1-4k}}\left[-2k + \frac{1}{2L}\sqrt{1-4k}\right],$$

$$L_2 = \frac{2}{(1-\sqrt{1-4k})\sqrt{1-4k}}\left[+2k + \frac{1}{2L}\sqrt{1-4k}\right],$$

$$L_3 = \frac{1}{k}\left[-2k + \frac{1}{2L}(4k-1)\right],\ L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}},$$

пусть $b = 0$,

$$D_1 = -\frac{r}{2}\sqrt{1-4k},\ D_2 = +\frac{r}{2}\sqrt{1-4k},\ D_3 = \frac{r}{2}.$$

Выпишем асимптотики для функций $L_i(k)$:

$$k \to \frac{1}{4},\ L_1 \to -\infty,\ L_2 \to +\infty,\ L_3 \to -2,$$
$$k \to 0,\ L_1 \to +0.5,\ L_2 \to +\infty,\ L_3 \to -\infty.$$

Имеем следующие матрицы преобразований при фиксированных параметрах:

$$k = 0.24,\ r = +10^{-5},$$

$$S = \begin{vmatrix} -0.00000487 & 0.00001812 & 1 \\ -0.00000352 & 0.00001115 & 1 \\ -0.00000704 & 0.00003625 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} -2684319.723 & 1938913.011 & 745406.7119 \\ -376446.431 & 232070.669 & 144375.7620 \\ -5.251 & 5.237 & 1.0140 \end{vmatrix},$$

$$k = 0.24,\ r = -10^{-5},$$

$$S = \begin{vmatrix} 0.00000704 & -0.00003625 & 1 \\ 0.00000487 & -0.00001812 & 1 \\ 0.00000352 & -0.00001115 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} -745406.712 & 2684319.723 & -1938913.011 \\ -144375.762 & 376446.431 & -232070.669 \\ 1.014 & -5.251 & 5.237 \end{vmatrix},$$

$$k = 0.20,\ r = +10^{-5},$$

$$S = \begin{vmatrix} -0.000000605 & 0.00002203 & 1 \\ -0.000000347 & 0.00000561 & 1 \\ -0.000000693 & 0.00004412 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} -8693394.736 & 4986681.114 & 3706713.621 \\ -76752.901 & 18059.506 & 58693.395 \\ -2.612 & 2.644 & 0.968 \end{vmatrix},$$

$$k = 0.20,\ r = -10^{-5},$$

$$S = \begin{vmatrix} 0.0000006926 & -0.00004411 & 1 \\ 0.0000006046 & -0.00002203 & 1 \\ 0.0000003467 & -0.00000561 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} -3864009.458 & 9059949.095 & -5195939.637 \\ -60689.893 & -60689.898 & -20708.455 \\ 0.999 & -2.684 & 2.685 \end{vmatrix},$$

$$k = 0.10,\ r = +10^{-5},$$

$$S = \begin{vmatrix} 0.000000114 & 0.00008816 & 1 \\ 0.000000058 & 0.00000280 & 1 \\ 0.000000116 & 0.00017610 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} 36454126.28 & -1.850 & -1.797 \\ -12200.458 & 420.705 & 11779.752 \\ -2.080 & 2.071 & 1.008 \end{vmatrix},$$

$$k = 0.10,\ r = -10^{-5},$$

$$S = \begin{vmatrix} -0.000000116 & -0.00017596 & 1 \\ -0.000000114 & -0.00008814 & 1 \\ -0.000000058 & -0.00000280 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} 17976761.23 & -36475931.28 & 18499170.04 \\ -11796.328 & 12217.625 & -421.297 \\ 1.010 & -2.081 & 2.072 \end{vmatrix},$$

$$k = 0.04,\ r = +10^{-5},$$

$$S = \begin{vmatrix} 0.0000000629 & 0.00054044 & 1 \\ 0.0000000314 & 0.00000204 & 1 \\ 0.0000000630 & 0.00107282 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} 64056692.55 & -31848280.67 & -32208411.88 \\ -1890.390 & 5.982 & 1884.407 \\ -2.008 & 2.000 & 1.007 \end{vmatrix},$$

$$k = 0.04,\ r = -10^{-5},$$

$$S = \begin{vmatrix} -0.00000006285 & -0.001066623 & 1 \\ -0.00000006278 & -0.000539638 & 1 \\ -0.00000003137 & -0.000002039 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} 32552229.90 & -64461770.05 & 31909540.15 \\ -1901.911 & 1906.150 & -4.239 \\ 1.017 & -2.018 & 2.001 \end{vmatrix}.$$

4 Майорановские плоские волны

Рассмотрим вопрос о построении в явном виде решений трех уравнений майорановского типа:

$$[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_1]\bar{\Phi}_1 = 0,\ \ \bar{M}_1 = M(1+\Delta_1);$$
$$[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_2]\bar{\Phi}_2 = 0,\ \ \bar{M}_2 = M(1+\Delta_2); \quad (4.1)$$
$$[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_3]\bar{\Phi}_3 = 0,\ \ \bar{M}_3 = M(1+\Delta_3).$$

Уравнения из (4.1) однотипны, поэтому достаточно исследовать одно из них:

$$[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_1]\bar{\Phi}_1 = 0. \quad (4.2)$$

Используем майорановский базис для матриц Дирака

$$\gamma_M^0 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix},\ \gamma_M^1 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix},$$

$$\gamma_M^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},\ \gamma_M^3 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix}.$$

Применяем подстановки

$$\bar{\Phi}_1 = e^{-iEt+ikx}\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix},$$

где $A_i = a_i + ia_i',\ B_i = b_i + ib_i',\ C_i = c_i + ic_i'$. Из уравнения Дирака (4.2) получаем (ниже $\varphi = Et - kx$) алгебраическую систему

$$\left\{\begin{vmatrix} k & -E & 0 & 0 \\ E & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & E \\ 0 & 0 & -E & -k \end{vmatrix} - i\bar{M}_1\right\}\begin{vmatrix} a_1 + ia_1' \\ a_2 + ia_2' \\ a_3 + ia_3' \\ a_4 + ia_4' \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3)$$

Будем строить решения этой системы, одновременно диагонализируя оператор спиральности:

$$(\gamma^2\gamma^3\partial_1)\bar{\phi}_1 = \sigma\bar{\phi}_1,$$

$$\bar{\phi}_1 = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\begin{vmatrix} a_1 + ia_1' \\ a_2 + ia_2' \\ a_3 + ia_3' \\ a_4 + ia_4' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} ik \begin{vmatrix} a_1 + ia_1' \\ a_2 + ia_2' \\ a_3 + ia_3' \\ a_4 + ia_4' \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} a_1 + ia_1' \\ a_2 + ia_2' \\ a_3 + ia_3' \\ a_4 + ia_4' \end{vmatrix}.$$

Откуда находим два собственных значения и соответствующие ограничения:

$$\sigma = +k,\ a_3 + ia_3' = +i(a_1 + i'a_1),$$
$$a_4 + ia_4' = -i(a_2 + i'a_2);$$

$$\sigma = -k,\ a_3 + ia_3' = -i(a_1 + i'a_1),$$
$$a_4 + ia_4' = +i(a_2 + i'a_2).$$

Следовательно, решения уравнений Дирака с фиксированными спиральностями представляются в виде (пусть $k = +\sqrt{E^2 - M^2}$):

$$\bar{\Phi}_1(\sigma = +k) = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\begin{vmatrix} a_1 + ia_1' \\ a_2 + ia_2' \\ +i(a_1 + ia_1') \\ -i(a_2 + ia_2') \end{vmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma = -k) = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\begin{vmatrix} a_1 + ia_1' \\ a_2 + ia_2' \\ -i(a_1 + ia_1') \\ +i(a_2 + ia_2') \end{vmatrix}.$$

Учтем эти ограничения в уравнении Дирака (4.3):

$$\sigma = +k,$$

$$\begin{vmatrix} k - i\bar{M}_1 & -E & 0 & 0 \\ E & -k - i\bar{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k - i\bar{M}_1 & E \\ 0 & 0 & -E & -k - i\bar{M}_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ +iA_1 \\ -iA_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.4)$$

$$\sigma = -k,$$

$$\begin{vmatrix} k - i\bar{M}_1 & -E & 0 & 0 \\ E & -k - i\bar{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k - i\bar{M}_1 & E \\ 0 & 0 & -E & -k - i\bar{M}_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ -iA_1 \\ +iA_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.5)$$

в результате из (4.4)–(4.5) получаем одну и ту же систему двух уравнений:

$$(k - i\bar{M}_1)A_1 - EA_2 = 0,$$
$$EA_1 + (-k - i\bar{M}_1)A_2 = 0.$$

Из требования обращения в нуль определителя системы находим

$$E^2 - \bar{M}_1^2 = k^2 \Rightarrow A_2 = \frac{k - i\bar{M}_1}{E}A_1.$$

Таким образом, для решений с разными поляризациями получаем представления

$$\bar{\Phi}_{\sigma=+k} = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\begin{vmatrix} A_1 \\ \frac{k - i\bar{M}_1}{E}A_1 \\ +iA_1 \\ -i\frac{k - i\bar{M}_1}{E}A_1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_{\sigma=-k} = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\begin{vmatrix} A_1 \\ \frac{k - i\bar{M}_1}{E}A_1 \\ -iA_1 \\ +i\frac{k - i\bar{M}_1}{E}A_1 \end{vmatrix}.$$

Для каждой поляризации находим выражения для майорановских компонент:

$$\bar{\Phi}^{+\mathrm{Major}}_{\sigma=+k} = \left| \begin{array}{c} (a_1 \cos\varphi + a_1' \sin\varphi) \\ \hline E^{-}[(k\cos\varphi - \bar{M}_1 \sin\varphi) a_1 + \\ +(\bar{M}_1 \cos\varphi + k \sin\varphi) a_1'] \\ \hline +(-a_1' \cos\varphi + a_1 \sin\varphi) \\ \hline E^{-1}[-(\bar{M}_1 \cos\varphi + k\sin\varphi) a_1 + \\ +(k\cos\varphi - \bar{M}_1 \sin\varphi) a_1'] \end{array} \right|,$$

$$\bar{\Phi}^{-\mathrm{Major}}_{\sigma=+k} = i \left| \begin{array}{c} (a'_1 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi) \\ \hline E^{-}[-(\bar{M}_1 \cos\varphi + k \sin\varphi) a_1 + \\ +(k\cos\varphi - \bar{M}_1 \sin\varphi) a_1'] \\ \hline +(a_1 \cos\varphi + a_1' \sin\varphi) \\ \hline -E^{-1}[(k\cos\varphi - \bar{M}_1 \sin\varphi) a_1 + \\ +(\bar{M}_1 \cos\varphi + k\sin\varphi) a_1'] \end{array} \right|,$$

$$\bar{\Phi}^{+\mathrm{Major}}_{\sigma=-k} = \left| \begin{array}{c} (a_1 \cos\varphi + a_1' \sin\varphi) \\ \hline E^{-}[(k\cos\varphi - \bar{M}_1 \sin\varphi) a_1 + \\ +(\bar{M}_1 \cos\varphi + k \sin\varphi) a_1'] \\ \hline -(-a_1' \cos\varphi + a_1 \sin\varphi) \\ \hline -E^{-1}[-(\bar{M}_1 \cos\varphi + k\sin\varphi) a_1 + \\ +(k\cos\varphi - \bar{M}_1 \sin\varphi) a_1'] \end{array} \right|,$$

$$\bar{\Phi}^{-\mathrm{Major}}_{\sigma=-k} = i \left| \begin{array}{c} (a_1' \cos\varphi - a_1 \sin\varphi) \\ \hline E^{-}[-(\bar{M}_1 \cos\varphi + k \sin\varphi) a_1 + \\ +(k\cos\varphi - \bar{M}_1 \sin\varphi) a_1'] \\ \hline -(a_1 \cos\varphi + a_1' \sin\varphi) \\ \hline E^{-1}[(k\cos\varphi - \bar{M}_1 \sin\varphi) a_1 + \\ +(\bar{M}_1 \cos\varphi + k\sin\varphi) a_1'] \end{array} \right|.$$

Решения для всех трех полей $\bar{\Phi}^{\mathrm{Major}}_j$ выглядят аналогично, различие только в параметрах $\bar{M}_i$. Используя выражение для матрицы преобразования S и S^{-1}, эти решения можно разложить в линейные комбинации по решениям с физическими массами M_1, M_2, M_3 и наоборот:

$$\bar{\Phi}^{\mathrm{Major}}_i = S_{ij} \Phi^{\mathrm{Major}}_j, \; \Phi^{\mathrm{Major}}_i = (S^{-1})_{ij} \bar{\Phi}^{\mathrm{Major}}_j.$$

Заключение

Исследована теория фермиона со спином ½, который характеризуется тремя физическими массовыми параметрами M_i. Рассмотрена модельная ситуация, когда можно считать, что локально допустимо использование декартовых координат, а внешний геометрический фон можно эффективно учесть постоянным скаляром Риччи R, для простоты ограничились одномерным случаем. Используя диагонализацию матрицы смешивания в сложной системе уравнений, задача приведена к трем раздельным уравнениями дираковского типа с эффективными массами $\bar{M}_i$, значения которых определяются численно, в зависимости от внутренних параметров модели и от величины (положительной или отрицательной) кривизны пространства-времени. Приведен также численный анализ необходимых диагонализирующих преобразований S и S^{-1}. Решения трех раздельных уравнений майорановского типа строятся в базисе импульс-спиральность. Используя выражение для матрицы преобразования, эти решения раскладываются в линейные комбинации по решениям с физическими массами и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург*, *В.Л.* О волновых уравнениях частиц с переменным спином / В.Л. Гинзбург, Я.А. Смородинский // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13. – С. 274.

2. *Гинзбург*, В.Л. К теории возбужденных спиновых состояний элементарных частиц / В.Л. Гинзбург // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13, вып. 1–2. – С. 33–58.

3. *Давыдов*, А.С. Волновое уравнение частицы, имеющей спин 3/2, в отсутствии поля / А.С. Давыдов // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13, вып. 9–10. – С. 313–319.

4. *Bhabha*, H.J. On the theory of point particles / H.J. Bhabha, Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1944. – Vol. 183. – P. 134–141.

5. *Bhabha*, *H.J.* Relativistic wave equations for the proton / H.J. Bhabha // Proc. Indian Acad. Sci. A. – 1945. – Vol. 21. – 241–264.

6. *Bhabha*, *H.J.* Relativistic wave equations for elementary particles / H.J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, № 2–3. – P. 200–215.

7. *Bhabha*, *H.J.* The theory of the elementary particles / H.J. Bhabha // Rep. Progr. Phys. – 1946. – Vol. 10. – P. 253–271.

8. *Harish-Chandra*. On the equations of motion of point particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1946. – Vol. 185. – P. 269–287

9. *Harish-Chandra.* Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1948. – Vol. 192. – P. 195–218.

10. *Гельфанд*, *И.М.* Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

11. *Гельфанд*, *И.М.* Теорема Паули для общих релятивистски инвариантных уравнений / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 12. – С. 1096–1104.

12. *Гельфанд*, И.М. Зарядная сопряженность для общих релятивистски инвариантных уравнений / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 12. – С. 1105–1111.

13. *Bhabha*, H.J. Theory of elementary particles-fields / H.J. Bhabha // Lectures Delivered at 2nd Summer Seminar Canadian Math. Congress: held at University of British Columbia, 1949. – P. 1–103.

14. *Федоров*, *Ф.И.* К вопросу о решении релятивистских волновых уравнений / Ф.И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1949. – Т. 65, № 6. – С. 813–814.

15. *Фрадкин*, *Е.С.* К теории частиц с высшими спинами / Е.С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.

16. *Федоров*, *Ф.И.* О минимальных полиномах матриц релятивистских волновых уравнений / Ф.И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 79, № 5. – С. 787–790.

17. *Федоров*, *Ф.И.* К теории частицы со спином 2 / Ф.И. Федоров // Ученые записки БГУ. – 1951. – Вып.12. – С. 156–173.

18. *Bhabha*, *H.J.* An equation for a particle with two mass states and positive charge density / H.J. Bhabha // Phil. Mag. – 1952. – Ser. VII, Vol. 43. – P. 33–47.

19. *Федоров*, *Ф.И.* Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф.И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.

20. *Petras*, *M.* A contribution of the theory of the Pauli-Fierz's equations a particle with spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 2. – P. 169–170.

21. *Petras*, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.

22. *Файнберг*, *В.Я.* К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитным и мезонным полями / В.Я. Файнберг // Труды ФИАН. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.

23. *Ginzburg*, *V.L.* On relativistic wave equations with a mass spectrum / V.L. Ginzburg // Acta Phys. Pol. – 1956. – Vol. 15. – P. 163–175.

24. *Shimazu*, *H.* A relativistic wave equation for a particle with two mass states of spin 1 and 0 / H. Shimazu // Progress of Theoretical Physics. – 1956. – Vol. 16, № 4. – P. 285–298.

25. *Regge*, *T.* On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325–326.

26. *Bergmann*, *P.G.* Subsidiary conditions in covariant theories / P.G. Bergmann, A.I. Janis // Phys. Rev. – 1958. – Vol. 111, № 4. – P. 1191–1200.

27. *Buchdahl*, *H.A.* On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field / H.A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1958. – Vol. 10. – P. 96–103.

28. *Shelepin*, *L.A.* Covariant theory of relativictic wave equations / L.A. Shelepin // Nucl. Phys. – 1962. – Vol. 33, № 4. – P. 580–593.

29. *Capri*, *A.Z.* First order wave equations for multi-mass fermions / A.Z. Capri // Nuovo Cim. B. – 1969. – Vol. 64, № 1. – P. 151–158.

30. *Aurilia*, *A.* Theory of high spin fields / A. Aurilia, H. Umezawa // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 182, № 5. – P. 1682–1694.

31. *Федоров*, *Ф.И.* Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин / Ф.И. Федоров, В.А. Плетюхов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1969. – № 6. – С. 81–86.

32. *Плетюхов*, *В.А.* Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.

33. *Федоров*, *Ф.И.* Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин / Ф.И. Федоров, В.А. Плетюхов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 78–83.

34. *Плетюхов*, *В.А.* Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином I / В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.

35. *Shamaly*, *A.* First-order wave equations for integral spin / A. Shamaly, A.Z. Capri // Nuovo Cim. B. – 1971. – Vol. 2, № 2. – P. 235–253.

36. *Amar*, *V.* Finite dimensional Gel'fand-Yaglom equations for arbitrary integral spin / V. Amar, U. Dozzio // Nuovo Cim. B. – 1972. – Vol. 9. – P. 53–63.

37. *Capri*, *A.Z.* Electromagnetic properties of a new spin-1/2 field / A.Z. Capri // Progr. Theor. Phys. – 1972. – Vol. 48, № 4. – P. 1364–1374.

38. Shamaly, A. Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A.Z. Capri // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51, no 14. – P. 1467–1470.

39. *Khalil*, *M.A.K.* Properties of a 20-component spin 1/2 relativistic wave equation / M.A.K. Khalil // Phys. Rev. D. – 1977. – Vol. 15, № 6. – P. 1532–1539.

40. *Wightman*, *A.S.* Invariant wave equations: general theory and applications to the external field problem / A.S. Wightman // Lecture Notes in Physics. – 1978. – Vol. 73. – P. 1–101.

41. *Khalil*, *M.A.K.* An equivalence of relativistic field equations / M.A.K. Khalil // Nuovo Cimento. A. – 1978. – Vol. 45, № 3. – P. 389–404.

42. *Garding*, *L.* Mathematics of invariant wave equations / L. Garding // Lect. Notes in Physics. – 1978. – Vol. 73. – P. 102–164.

43. *Gazeau*, *J.P.* L'equation de Dirac avec masse et spin arbitrares: une construction simple et naturelle / J.P. Gazeau // J. Phys. G. Nucl. Phys. – 1980. – Vol. 6, № 12. – P. 1459–1475.

44. *Cox*, *W.* Higher-rank representations for zero-spin filds theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 627–635.

45. *Cox*, *W.* First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.

46. *Mathews*, *P.M.* On the admissible Lorentz group representations in unique-mass, unique-spin relativistic wave equations / P.M. Mathews,

B. Vijayalakshmi, M.Sivakuma // Phys. A. – 1982. – Vol. 15, № 11. – P. 1579–1582.

47. *Mathews*, *P.M*. On inequivalent classes unique-mass-spin relativistic wave equations involving repeated irreducible representations with arbitrary multiplicities / P.M. Mathews, B. Vijayalakshmi // J. Math. Phys. – 1984. – Vol. 25, № 4. – P. 1080–1087.

48. *Cox*, *W*. On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita-Schwinger field coupled to an external electromagnetic field / W. Cox // J. Phys. A. – 1989. – Vol. 22, № 10. – P. 1599–1608.

49. *Deser*, *S*. Inconsistencies of massive charged gravitating higher spins / S. Deser, A. Waldron // Nucl. Phys. B. – 2002. – Vol. 631. – P. 369–387.

50. *Simulik*, *V*. Relativistic wave equations of arbitrary spin in quantum mechanics and field theory, example spin $S = 2$ / V. Simulik // J. of Phys. Conference Series. – 2017. – Vol. 804, № 1. – Paper 012040.

51. *Spin* 1/2 *particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field*, *exact solutions* / E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, Y.A. Voynova, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.

52. *Spin* 1 *Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field* / V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20, № 1. – P. 21–39.

53. *Spin* 1 *Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter 4 in the book «Quaternions: Theory and Applications». – Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 47–84.

54. *Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin* 1 *particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter 3 in the book «Quaternions: Theory and Applications». – Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 11–46.

55. *Квантовая механика частицы со спином* 1 *и квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле* / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 18–27.

56. *Spin* 1/2 *particle with two mass states. interaction with external fields* / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20, № 4. – P. 404–423.

57. *Spin* 1/2 *particle with two masses in magnetic field* / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Applied Sciences. – 2018. – Vol. 20. – P. 148–166.

58. *Spin* 1/2 *particle with two masses in external magnetic field* / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov, V.V. Kisel, N.V. Samsonenko // J. Mech. Cont. and Math. Sci. Special Issue. – 2019. – № 1. – P. 651–660.

59. *Представления группы вращений и группы Лоренца*, *их применения* / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. – М.: Наука, 1958. – 367 с.

60. *Elementary Particles with Internal Structure in External Fields*. Vol I. *General Theory* / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

61. *Elementary Particles with Internal Structure in External Fields*. *Vol* II. *Physical Problems* / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p.

62. *Фермион с тремя массовыми параметрами*: *взаимодействие с внешними полями* / В.В. Кисель, В.А. Плетюхов, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 661–667.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, *проект* № Ф18У-009.

Поступила в редакцию 08.10.19.