

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ КОСИНУСОИДАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

А.В. Нестерович

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

DEFORMATION OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE UNDER COSINE LOADING IN ITS PLANE

A.V. Nestsiarovich

Belarusian State University of Transport, Gomel

Исследованы перемещения в несимметричной по толщине круглой трехслойной пластине при неосесимметричном нагружении в своей плоскости. Распределенная нагрузка, зависящая от радиальной и тангенциальной координат, приложена в срединной плоскости заполнителя. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Общее решение выписано в рядах Фурье. Решение в конечном виде приведено для косинусоидальной нагрузки. Проведена его численная апробация.

Ключевые слова: трехслойная круглая пластина, перемещения, неосесимметричное растяжение-сжатие, косинусоидальная нагрузка.

The displacements in a round three-layer plate asymmetric in thickness under non-axisymmetric loading in its plane are investigated. The distributed load, depending on the radial and tangential coordinates, is applied in the median plane of the aggregate. Equilibrium equations are obtained by the variational Lagrange method. The general decision is written out in the Fourier series. The final solution is given for a cosine load. It was numerically tested.

Keywords: three-layer round plate, displacements, axisymmetric tension-compression, cosine load.

Введение

К материалам, применяемым в современном машиностроении и строительстве, диктуются все более высокие требования по прочности и долговечности. Это обусловило появление композиционных, в том числе трехслойных, элементов конструкций.

Изучению их деформирования посвящено множество публикаций. Постановки и методы решения соответствующих краевых задач приведены в монографиях [1]–[4]. Колебания трехслойных элементов конструкций под действием различных нагрузок посвящены статьи [5]–[12]. В публикациях [13]–[18] рассмотрено напряженно-деформированное состояние трехслойных стержней, прямоугольных и круговых пластин при термосиловых нагружениях. Результаты, исследований изотермического осесимметричного деформирования трехслойных круговых и кольцевых пластин, в том числе связанных с упругим основанием, приведены в статьях [19]–[25]. Постановка и вывод основных уравнений равновесия трехслойных круглых пластин при деформировании в своей плоскости опубликованы в статьях [26]–[30].

Здесь приведена общая постановка и решение краевой задачи о неосесимметричном растяжении-сжатии и кручении упругой круговой трехслойной пластины. Рассмотрен частный случай нагружения косинусоидальной нагрузкой, получены аналитические и численные результаты.

1 Определение общего решения краевой задачи

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круглая пластина, состоящая из двух несущих слоев и толстого несжимаемого заполнителя. Постановка задачи приводится в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , связанной со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1.1). К срединной плоскости заполнителя приложена внешняя распределенная нагрузка, проекции которой на оси координат: $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$.

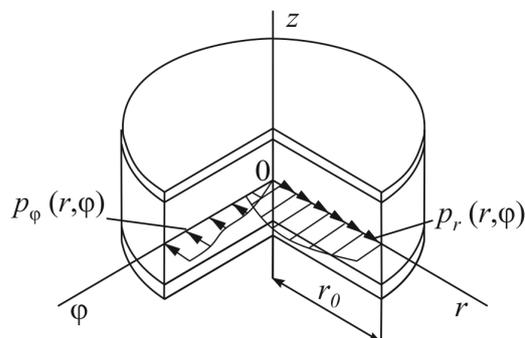


Рисунок 1.1 – Расчетная схема круглой трехслойной пластины

Искомые перемещения обозначим через $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$. Радиальные и тангенциальные деформации будут определяться соотношениями:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_{\varphi,\varphi} + u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{u_{r,\varphi} - u_{\varphi,r} + u_{\varphi,r} r}{2r}.$$

Напряжения следуют из закона Гука. Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где δA – вариация работы внешних сил; δW – вариация работы напряжений.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет

$$\delta A = \iint_S (p_r \delta u_r + p_\varphi \delta u_\varphi) r dr d\varphi,$$

где двойной интеграл берется по всей срединной поверхности заполнителя S .

Виртуальная работа сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int (\sigma_{rr}^{(k)} \delta \varepsilon_{rr}^{(k)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 2\sigma_{r\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi.$$

Проведя необходимые преобразования, получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{r,rr} + \frac{a_1}{r} u_{r,r} - \frac{a_1}{r^2} u_r + \frac{a_3}{r^2} u_{r,\varphi\varphi} + \\ + \frac{a_2 + a_3}{r} u_{\varphi,\varphi r} - \frac{a_1 + a_3}{r^2} u_{\varphi,\varphi} = -p_r, \\ a_3 u_{\varphi,rr} + \frac{a_{13}}{r} u_{\varphi,r} - \frac{a_3}{r^2} u_\varphi + \frac{a_2 + a_3}{r} u_{r,\varphi} + \\ + \frac{a_1}{r^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{r^2} u_{r,\varphi} = -p_\varphi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; a_1, a_2, a_3 – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 \left(K_k + \frac{4}{3} G_k \right) h_k, \\ a_2 &= \sum_{k=1}^3 \left(K_k - \frac{2}{3} G_k \right) h_k, \\ a_3 &= \sum_{k=1}^3 G_k h_k. \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (1.1) искомые перемещения и нагрузки раскладываются в тригонометрические ряды Фурье по координате φ :

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi) &= u_{r0}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{rn}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{rn}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\ u_\varphi(r, \varphi) &= u_{\varphi0}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_r(r, \varphi) &= p_{r0}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{rn}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{rn}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\ p_\varphi(r, \varphi) &= p_{\varphi0}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $u_{r0}(r), u_{\varphi0}(r)$ – перемещения, соответствующие осесимметричному нагружению; $u_{rn}^{(1)}(r), u_{rn}^{(2)}(r), u_{\varphi n}^{(1)}(r), u_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – искомые амплитудные составляющие перемещений, зависящие от радиальной координаты; $p_{r0}(r), p_{\varphi0}(r)$ – осесимметричные составляющие нагрузки; $p_{rn}^{(1)}(r), p_{rn}^{(2)}(r), p_{\varphi n}^{(1)}(r), p_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – амплитудные составляющие радиальной и тангенциальной неосесимметричных внешних нагрузок, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} p_{rn}^{(1)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ p_{rn}^{(2)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \\ p_{\varphi n}^{(1)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ p_{\varphi n}^{(2)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

После подстановки разложений (1.2) в уравнения равновесия (1.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему из четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для определения искомых амплитудных функций:

$$\begin{aligned} L_2 \left(a_1 u_{rn}^{(1)}(r) \right) - \frac{a_3 n^2}{r^2} u_{rn}^{(1)}(r) + \frac{(a_2 + a_3)n}{r} u_{\varphi n}^{(2),r}(r) - \\ - \frac{(a_1 + a_3)n}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)}(r) = -p_{rn}^{(1)}(r), \\ L_2 \left(a_1 u_{rn}^{(2)}(r) \right) - \frac{a_3 n^2}{r^2} u_{rn}^{(2)}(r) - \frac{(a_2 + a_3)n}{r} u_{\varphi n}^{(1),r}(r) + \\ + \frac{(a_1 + a_3)n}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)}(r) = -p_{rn}^{(2)}(r), \\ L_2 \left(a_3 u_{\varphi n}^{(1)}(r) \right) + \frac{(a_2 + a_3)n}{r} u_{rn}^{(2),r}(r) - \frac{a_1 n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)}(r) + \\ + \frac{(a_1 + a_3)n}{r^2} u_{rn}^{(2)}(r) = -p_{\varphi n}^{(1)}(r), \\ L_2 \left(a_3 u_{\varphi n}^{(2)}(r) \right) - \frac{(a_2 + a_3)n}{r} u_{rn}^{(1),r}(r) - \frac{a_1 n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)}(r) - \\ - \frac{(a_1 + a_3)n}{r^2} u_{rn}^{(1)}(r) = -p_{\varphi n}^{(2)}(r). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Общее решение системы (1.4) представим в виде суммы решений соответствующей однородной

системы и частного решения $u_{rn}^{(1)*}$, $u_{\varphi n}^{(1)*}$, $u_{rn}^{(2)*}$, $u_{\varphi n}^{(2)*}$ данной системы. Для однородной системы общее решение получено с помощью программного пакета Maple. В результате, с учетом условия ограниченности перемещений в центре пластины, амплитудные перемещения для n -ой составляющей принимают вид

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)} &= C_{n1}r^{S_{n1}} + C_{n2}r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(1)*}, \\ u_{\varphi n}^{(2)} &= -C_{n1}h_{n1}r^{S_{n1}} - C_{n2}h_{n2}r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(2)*}, \\ u_{rn}^{(2)} &= C_{n3}r^{S_{n1}} + C_{n4}r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(2)*}, \\ u_{\varphi n}^{(1)} &= C_{n3}h_{n1}r^{S_{n1}} + C_{n4}h_{n2}r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(1)*}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где C_{ni} ($i=1, \dots, 4$) – константы интегрирования, следующие из граничных условий; S_{n1} , S_{n2} – степени в фундаментальных решениях, зависящие от параметра n , геометрических и упругих характеристик материалов слоев

$$S_{n1} = \sqrt{\frac{a_1^2 n^2 - a_2^2 n^2 - 2a_2 a_{13} n^2 + 2a_1 a_3 - Q_n}{2a_1 a_3}},$$

$$S_{n2} = \sqrt{\frac{a_1^2 n^2 - a_2^2 n^2 - 2a_2 a_3 n^2 + 2a_1 a_3 + Q_n}{2a_1 a_3}},$$

$$Q_n = \sqrt{n^2 (a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_3)} \times \sqrt{(n^2 a_1^2 + (4 - 2n^2)a_1 a_3 - n^2 a_2^2 - 2n^2 a_2 a_3)};$$

h_{n1} , h_{n2} – коэффициенты

$$h_{n1} = \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_3 n^2 - Q) \times (a_1 + a_3 + (a_2 + a_{13})S_{n1})}{h_z},$$

$$h_{n2} = \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_3 n^2 + Q) \times (a_1 + a_{13} + (a_2 + a_3)S_{n2})}{h_z},$$

$$h_z = 2 \left((a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2) a_3^2 + (2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2) a_3 + a_1 a_2^2 n^2 \right) n.$$

2 Косинусоидальная нагрузка

Рассмотрим деформирование пластины под действием неосимметричной косинусоидальной нагрузки (рисунок 2.1)

$$p_r(r, \varphi) = p_0 \cos \varphi, \quad p_\varphi = 0, \quad p_0 = \text{const.} \quad (2.1)$$

Коэффициенты разложения нагрузки (2.1) в ряд (1.2) следуют из (1.3)

$$p_{rn}^{(1)}(r) = \frac{p_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos(n\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ p_0, & n = 1, \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} p_{r1}^{(1)}(r) &= p_0, \quad p_{rn}^{(1)}(r) = 0 \quad \text{при } n > 1, \\ p_{rn}^{(2)}(r) &= 0, \quad p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n}^{(2)}(r) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

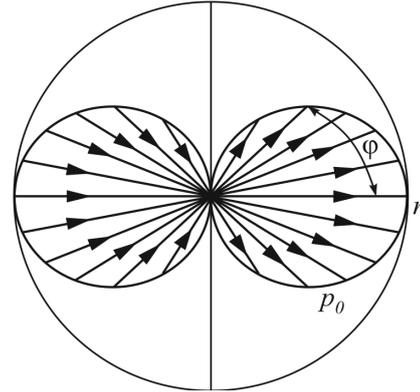


Рисунок 2.1 – Расчетная схема при косинусоидальной нагрузке

Разложение нагрузки в ряд (2.2) содержит одно ненулевое слагаемое, которое не зависит от радиальной координаты, при этом $S_{11} = 0$, $h_{11} = -1$. Ненулевой компонент перемещений будет

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= -C_{11} + C_{12}h_{12}r^{S_{12}} + \frac{a_1 - 3a_3}{4(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r^2, \\ u_{\varphi 1}^{(2)} &= C_{11} + C_{12}r^{S_{12}} - \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{4(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r^2, \\ u_{r1}^{(2)} &= C_{13} - C_{14}h_{12}r^{S_{12}}, \\ u_{\varphi 1}^{(1)} &= C_{13} + C_{14}r^{S_{12}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$S_{12} = \sqrt{\frac{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_3)}{a_1 a_3}},$$

$$h_{12} = \frac{a_1 a_3 + a_3^2 - a_3(a_2 + a_3)S_{12}}{a_1^2 + a_1 a_3 - a_2^2 - 2a_2 a_3 - a_3^2}.$$

Константы интегрирования C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{14} следуют из условия равенства нулю перемещений (2.3) на контуре

$$u_{r1}^{(1)}(r_0) = -C_{11} + C_{12}h_{12}r_0^{S_{12}} + \frac{a_1 - 3a_3}{4(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r_0^2 = 0,$$

$$u_{\varphi 1}^{(2)}(r_0) = C_{11} + C_{12}r_0^{S_{12}} - \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{4(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r_0^2 = 0,$$

$$u_{r1}^{(2)}(r_0) = C_{13} - C_{14}h_{12}r_0^{S_{12}} = 0,$$

$$u_{\varphi 1}^{(1)}(r_0) = C_{13} + C_{14}r_0^{S_{12}} = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{a_1 - 3a_3 + (a_1 + 2a_2 + 3a_3)h_{12}}{4(1 + h_{12})(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r_0^2, \\ C_{12} &= \frac{a_2 + 3a_3}{2(1 + h_{12})(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r_0^{2-S_{12}}, \\ C_{13} &= 0, \quad C_{14} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полные перемещения в пластине следуют из соотношений (1.2)

$$u_r(r, \varphi) = u_{r0}(r) + u_{r1}^{(1)}(r) \cos \varphi,$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = u_{\varphi0}(r) + u_{\varphi1}^{(2)}(r) \sin \varphi, \quad (2.5)$$

где $u_{r1}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi1}^{(2)}(r)$ определяются соотношениями (2.3), (2.4).

Симметричная составляющая перемещений отсутствует, поэтому $u_{r0}(r) \equiv 0$, $u_{\varphi0}(r) \equiv 0$. Окончательно выражения для полных перемещений примут вид:

$$u_r(r, \varphi) = - \left[(a_1 - 3a_3)(1 + h_{12})(r_0^2 - r^2) + 2(a_2 + 3a_3)h_{12}(r_0^2 - r_0^{2-S_{12}}r^{S_{12}}) \right] \times$$

$$\times \frac{P_0}{4(1 + h_{12})(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} \cos \varphi,$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = \left[(a_1 - 3a_3 + h_{12}(a_1 + 2a_2 + 3a_3)) \times \right.$$

$$\times (r_0^2 - r^2) + 2(a_2 + 3a_3)(r_0^{2-S_{12}}r^{S_{12}} - r^2) \left. \right] \times$$

$$\times \frac{P_0}{4(1 + h_{12})(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} \sin \varphi. \quad (2.6)$$

3 Численные результаты

Результаты получены при интенсивности поверхностной распределенной нагрузки $p_0 = 10$ МПа. Материалы слоев Д16Т-фторопласт-4-Д16Т, радиус пластины $r_0 = 1$ м, толщины слоев $h_1 = 0,02$ м, $h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 2c$, $c = 0,2$ м. Механические характеристики материалов заимствованы из [3].

На рисунке 3.1 показано изменение радиальных перемещений $u_r(r, \varphi)$ вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты: 1 – $\varphi = 0, 2\pi$; 2 – $\varphi = \pi/4, 7\pi/4$; 3 – $\varphi = 3\pi/4, 5\pi/4$; 4 – $\varphi = \pi$. Положительный знак

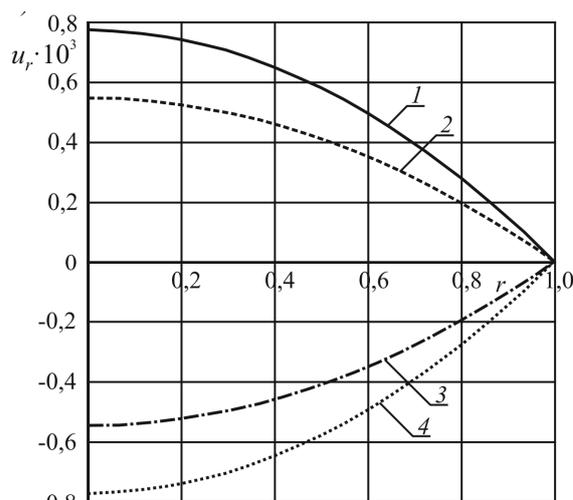


Рисунок 3.1 – Изменение радиальных перемещений $u_r(r, \varphi)$ вдоль радиуса пластины

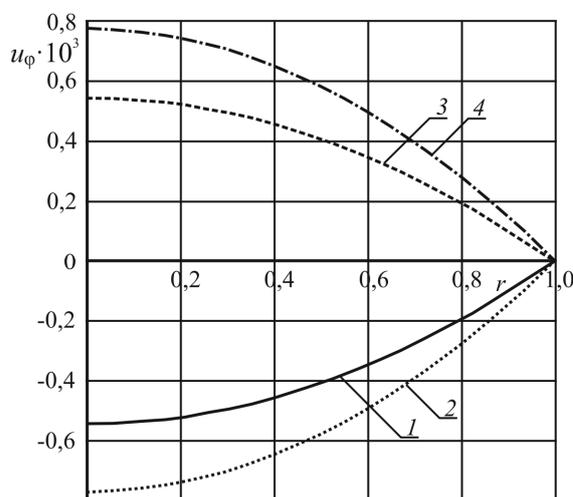


Рисунок 3.2 – Изменение тангенциальных перемещений $u_\varphi(r, \varphi)$ вдоль радиуса пластины

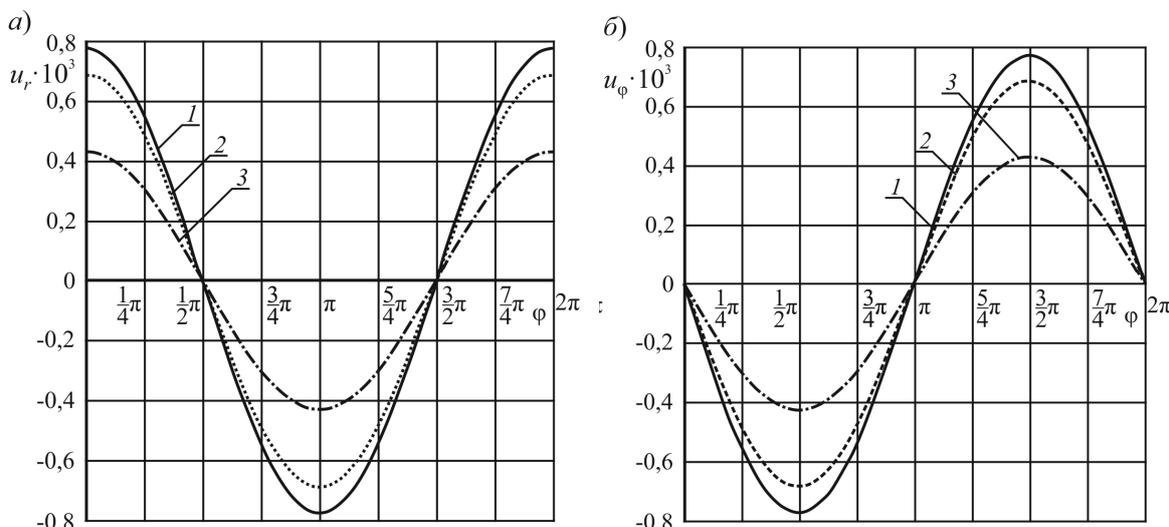


Рисунок 3.3 – Изменение радиальных $u_r(r, \varphi)$ и тангенциальных $u_\varphi(r, \varphi)$ перемещений в зависимости от окружной координаты

радиальных перемещений показывает растяжение, отрицательный – сжатие. Таким образом, первая и четвертая четверти пластины растянуты, вторая и третья – сжаты, из чего следует, что центр пластины сдвинут вправо. Максимальные значения радиальных перемещений по модулю достигаются в центре сечения.

Рисунок 3.2 иллюстрирует изменение тангенциальных $u_\varphi(r, \varphi)$ перемещений вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты: $1 - \varphi = \pi/4, 3\pi/4$; $2 - \varphi = \pi/2$; $3 - \varphi = 5\pi/4, 7\pi/4$; $4 - \varphi = 3\pi/2$. Максимальные значения тангенциальных перемещений совпадают по модулю с радиальными и достигаются в центре пластины. Точки верхней части пластины поворачиваются по часовой стрелке, т. к. соответствующие тангенциальные перемещения отрицательные, нижней – против часовой стрелки.

Рисунок 3.3 иллюстрирует изменение радиальных $u_r(r, \varphi)$ – (а) и тангенциальных $u_\varphi(r, \varphi)$ – (б) перемещений в зависимости от окружной координаты φ : $1 - r = 0, 2 - r = r_0/3, 3 - r = 2r_0/3$. Экстремальные значения радиальных перемещений соответствуют экстремумам функции $\cos\varphi$, тангенциальных – $\sin\varphi$. При приближении к контуру пластины перемещения уменьшаются до нуля в соответствии с граничными условиями.

Заключение

Предложенное общее аналитическое решение и численные результаты могут быть использованы для исследования напряженно-деформированного состояния при нагружении произвольной неосесимметричной нагрузкой в плоскости пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
2. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 275 с.
3. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.B. Nagiyev. – Apple Academic Press, New York, 2012. – 346 p.
4. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – М.: Физматлит, 2008. – 384 с.
5. Старовойтов, Э.И. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – Т. 34, № 5. – С. 70–79.
6. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов,

Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

7. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 86–93.

8. Старовойтов, Э.И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

9. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 8. – P. 945–952.

10. Deshpande, V.S. Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / V.S. Deshpande, N.A. Fleck // J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71, № 5. – P. 637–645.

11. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates under resonant loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.

12. Леоненко, Д.В. Колебания элементов авиационных конструкций, возбужденные тепловым воздействием / Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский, Э.И. Старовойтов // Известия вузов. Авиационная техника. – 2016. – № 4. – С. 25–32.

13. Старовойтов, Э.И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э.И. Старовойтов, А.В. Попченко, Д.В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – Вып. 28. – С. 23–26.

14. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 98–104.

15. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

16. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

17. Starovoitov, E.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.

18. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
19. Козел, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
20. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.
21. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.
22. Козел, А.Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.
23. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.
24. Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10. – С. 55–66.
25. Захарчук, Ю.В. Трёхслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
26. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.
27. Нестерович, А.В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
28. Нестерович, А.В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.
29. Нестерович, А.В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 266–272.
30. Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).

Поступила в редакцию 15.01.20.