

РАЗРЕШИМЫЕ НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ СО СВОЙСТВОМ \mathcal{P}_2 ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.В. Балычев, А.С. Вегера

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUBLE SATURATED FORMATIONS WITH THE \mathcal{P}_2 PROPERTY FOR FINITE GROUPS

S.V. Balychev, A.S. Vegera

F. Scorina Gomel State University

Исследуются конечные группы, представимые в виде произведения попарно перестановочных подгрупп с формационными ограничениями на их частичные произведения. В частности, получено описание введенных Б. Амбергом, Л.С. Казариным и Б. Хефлингом разрешимых наследственных насыщенных формаций групп со свойством \mathcal{P}_2 .

Ключевые слова: конечная группа, произведение попарно перестановочных подгрупп, формация со свойством \mathcal{P}_2 , формация с условием Кегеля, формация с условием Шеметкова.

The finite groups that can be represented as a product of pairwise permutable subgroups with formational restrictions on factors and their partial products are studied. In particular, the description of solvable hereditary saturated formations of groups with the property \mathcal{P}_2 introduced by B. Amberg, A.S. Kazarin and Hefling is obtained.

Keywords: finite group, product of pairwise permutable subgroups, formation with the \mathcal{P}_2 property, formation with the Kegel property, formation with the Shemetkov property.

Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными. Группа G называется произведением попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n , если $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ и $A_i A_j = A_j A_i$ для любых пар чисел $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Изучению групп с такой факторизацией посвящены классические работы Ф. Холла, С.А. Чунихина, Б. Хупперта, Г. Виландта, О. Кегеля, Л.С. Казарина. Ряд важных результатов, полученных в этом направлении до 2010 года, отражены в монографии [1].

В работе [2] В. Амберг, Л.С. Казарин и Б. Хефлинг, используя методы теории классов (формаций), получили существенное продвижение в изучении групп, факторизуемых своими попарно перестановочными подгруппами. Ими было введено следующее

Определение. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} – классы групп и k – натуральное число. Говорят, что класс \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_k для \mathfrak{X} -групп, если \mathfrak{X} -группа G принадлежит \mathfrak{F} в том случае, когда G может быть записана в виде произведения n подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n таких, что для каждого выбора индексов $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$ группа $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$ принадлежит \mathfrak{F} .

Если \mathfrak{X} совпадает с классом всех групп, то в этом случае просто говорят, что класс \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_k .

В работе [2] для каждого натурального $k \geq 2$ были построены серии разрешимых формаций, обладающие свойством \mathcal{P}_k , но не обладающие свойством \mathcal{P}_{k-1} . Полностью описаны все разрешимые наследственные и насыщенные классы (формации) групп, имеющие свойство \mathcal{P}_1 для разрешимых групп. Приведены также серии формаций произвольных групп, обладающих свойством \mathcal{P}_1 .

В настоящей статье мы продолжаем исследования, начатые в [2]. Нами исследуется следующая естественная

Проблема. Пусть \mathfrak{X} – наследственный класс групп и n – заданное натуральное число, $n > 1$. Найти конструктивное описание всех насыщенных формаций \mathfrak{F} , имеющих свойство \mathcal{P}_n для \mathfrak{X} -групп.

Настоящая работа посвящена решению данной проблемы для разрешимых наследственных насыщенных формаций в случае, когда $n = 2$ и \mathfrak{X} совпадает с классом всех групп.

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения, определения и известные результаты, которые при необходимости можно найти в монографиях [1], [3]–[4]. В настоящем разделе мы приводим необходимые сведения, которые нам потребуются для краткости формулировок и доказательств основных результатов работы.

Закрепим следующие обозначения: \mathbb{P} – множество всех простых чисел. Пусть G – группа, $p \in \mathbb{P}$, π – некоторое множество простых чисел; через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G ; $\text{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп G ; $F_p(G)$ – p -нильпотентный радикал группы G , т. е. наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа G ; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G ; 1 – единичная группа; $N \times M$ обозначает полупрямое произведение групп N и M .

Будем использовать следующие стандартные обозначения для классов групп:

\mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп; \mathfrak{S}_π – класс всех разрешимых π -групп, где π – некоторое множество простых чисел ($\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_\pi$, для $\pi = \{p\}$); \mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп; \mathfrak{N}_π – класс всех нильпотентных π -групп; \mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп.

Класс групп \mathfrak{X} называется формацией, если:

1) из $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft G$, всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{X}$;

2) из $G/N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{X}$, всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{X}$.

Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \subseteq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется наследственной (нормально наследственной), если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее (нормальные) подгруппы. Через G^δ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G для которой $G/G^\delta \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что нормально наследственный класс \mathfrak{F} называется классом Фиттинга, если \mathfrak{F} содержит всякую группу $G = AB$, являющуюся произведением своих нормальных (субнормальных) \mathfrak{F} -подгрупп A и B . Формация групп, одновременно являющаяся классом Фиттинга, называется формацией Фиттинга.

Пусть \mathfrak{X} – непустой класс групп. Группа G называется минимальной не \mathfrak{X} -группой, если G не принадлежит \mathfrak{X} , а все собственные ее подгруппы принадлежат \mathfrak{X} . Минимальные не \mathfrak{N} -группы называются группами Шмидта. Множество минимальных не \mathfrak{X} -групп для класса \mathfrak{X} обозначается через $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$.

Функция $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Через $LF(f)$ обозначается класс всех групп G , у которых для любого главного фактора H/K и для каждого $p \in \pi(H/K)$ выполняется условие:

$$G/C_G(H/K) \in f(p).$$

Формация \mathfrak{F} называется локальной, если существует локальный экран f , такой что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Согласно знаменитой теореме Гашноца – Любезеде – Шмида непустая формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна.

Лемма 1.1 [3, лемма 4.5]. Пусть f – локальный экран формации \mathfrak{F} . Группа G тогда и только тогда принадлежит \mathfrak{F} , когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда локальный экран h , где $h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p также является локальным экраном \mathfrak{F} . Такой локальный экран называется полным. Локальный экран f называется внутренним, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого простого p . Согласно теореме 3.3 из [3] всякая локальная формация \mathfrak{F} имеет единственный максимальный внутренний локальный экран h , причем h является полным.

Формация \mathfrak{F} называется разрешимой, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$; локальный экран f называется разрешимым, если $f(p) \subseteq \mathfrak{S}$ для каждого простого p .

Пусть \mathfrak{F} – разрешимая локальная формация. Множество Ω всех ее разрешимых локальных экранов можно считать частично упорядоченным с отношением, которое задается следующим образом: если f_1, f_2 – элементы множества Ω , то $f_1 \leq f_2$, если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого простого числа p . К. Дерк доказал, что множество Ω в данном упорядочении имеет единственный максимальный элемент. Используя идею Дерка, в работе [5] был получен аналогичный результат для случая, когда \mathfrak{F} – разрешимая наследственная локальная формация, а Ω – множество всех ее наследственных локальных экранов.

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Формация \mathfrak{F} имеет единственный разрешимый максимальный наследственный локальный экран f , причем f полный, т. е. $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для каждого простого p ;

(2) $\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}$ для любого простого p .

Для получения основного результата работы нами существенно будет использоваться

конструкция формации $w\mathfrak{F}$. Для ее определения и применения нам потребуются определение и известные свойства \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп, доказательства которых можно найти в монографии [4].

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G , если либо $H = G$, либо существует цепь максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$. Кратко обозначается $H \mathfrak{F}$ -sn G .

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – формация, H и K – подгруппы группы G и $N \triangleleft G$. Тогда справедливы следующие результаты.

- (1) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N .
- (2) Если $H/N \mathfrak{F}$ -sn G/N , то $H \mathfrak{F}$ -sn G .
- (3) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $HN \mathfrak{F}$ -sn G .
- (4) Если $H \mathfrak{F}$ -sn K и $K \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \mathfrak{F}$ -sn G .
- (5) Если все композиционные факторы G принадлежат \mathfrak{F} , то всякая субнормальная подгруппа G является \mathfrak{F} -субнормальной.
- (6) Пусть p – простое число и G – p -группа, если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то все подгруппы G являются \mathfrak{F} -субнормальными.

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация, $H \leq G$ и $M \leq G$. Тогда справедливы следующие результаты.

- (1) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \cap M \mathfrak{F}$ -sn M .
- (2) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G и $M \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \cap M \mathfrak{F}$ -sn G ;
- (3) Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H \mathfrak{F}$ -sn G .

В работе [6] было начато рассмотрение следующей задачи. Пусть \mathfrak{F} – формация. Что можно сказать о структуре группы G , если все ее силовские подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны в G ? В статье [7] был введен и исследовался класс групп $w\mathfrak{F}$.

Определение 1.5 [7]. Для непустой формации \mathfrak{F} через $w\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп G таких, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G любая силовская подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна.

В работах [7]–[8] были установлены основные свойства формации $w\mathfrak{F}$. В работе [7] было доказано, что если \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, то $w\mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией. В [8] было подробно изучено локальное задание $w\mathfrak{F}$ и найдены необходимые и достаточные условия, при которых $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

2 Основной результат

Начало изучения формаций со свойством \mathcal{P}_2 восходит к работам О. Кегеля и Б. Хупперта.

Пусть группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n и π – множество простых чисел. Из результата О. Кегеля [9] и леммы 2.2 [1] следует, что G имеет нормальную холлову π -подгруппу, если каждое из произведений $A_i A_j$ имеет нормальную холлову π -подгруппу. В частности, если все $A_i A_j$ нильпотентны, то и группа G нильпотентна. В [10, теорема VI, 10.2] Б. Хупперт показал, если каждое произведение $A_i A_j$ группы G является φ -дисперсивной подгруппой, где φ – некоторое линейное упорядочение множества, то и сама группа G будет φ -дисперсивной.

Сформулируем важный для нашей работы результат Л.С. Казарина.

Теорема 2.1 [11]. Пусть группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если каждая подгруппа $A_i A_j$ разрешима, то и сама группа G разрешима.

Для доказательства основного результата нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 2.2. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация, имеющая свойство \mathcal{P}_2 . Тогда \mathfrak{F} является формацией Фиттинга.

Доказательство. Нам необходимо показать, что формация \mathfrak{F} замкнута относительно взятия произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Предположим противное. Выберем группу $G = HK$ минимального порядка такую, что H и K – нормальные \mathfrak{F} -подгруппы группы G , но $G \notin \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – разрешимая формация, то $G \in \mathfrak{S}$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда для G/N все условия леммы выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Из того, что \mathfrak{F} – формация, следует, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Из насыщенности \mathfrak{F} вытекает, что $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = N \rtimes M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G и $N = F(G) = C_G(N)$. Из $N \subseteq H$ и

$$H = H \cap NM = N(H \cap M),$$

$N \subseteq K$ и $K = K \cap NM = N(K \cap M)$ следует, что $H \cap M$ и $K \cap M$ – нормальные группы в M и $M = (M \cap H)(M \cap K)$.

Рассмотрим факторизацию $G = NT_1 T_2$, где $T_1 = H \cap M$ и $T_2 = K \cap M$. Заметим, что $T_1 T_2 = M \in \mathfrak{F}$. Тогда $NT_1 = H \in \mathfrak{F}$ и $NT_2 = K \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 , то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. \square

Лемма 2.3. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация, имеющая свойство \mathcal{P}_2 . Тогда $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Доказательство. По 2) теоремы 3.1 из [8] формация $\mathfrak{F} \subseteq w\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $w\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F} \neq \emptyset$. Выберем группу G минимального порядка из $w\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} и $w\mathfrak{F}$ – наследственные насыщенные формации, то нетрудно показать, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , $\Phi(G) = 1$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Ввиду разрешимости G выполняется $N = F(G)$.

Так как группа G разрешима, то по теореме Холла G можно представить в виде произведения ее попарно перестановочных силовских подгрупп, т. е. $G = G_{p_1} G_{p_2} \cdots G_{p_n}$, где G_{p_i} – силовская p_i -подгруппа и $p_i \in \pi(G)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть $n = 1$. Тогда $G = G_{p_1}$. Из насыщенности \mathfrak{F} и $p_1 \in \pi(w\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

2. Пусть $n > 2$. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2} \cdots G_{p_n}$. Так как $G \in w\mathfrak{F}$, то для любой $G_{p_i} \in \text{Syl}(G)$ верно, что $G_{p_i} \mathfrak{F}$ -сп G для $i \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим произведение $G_{p_i} G_{p_j}$, где $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \neq j$. Ввиду (1) леммы 1.4 имеем, что $G_{p_i} \mathfrak{F}$ -сп $G_{p_i} G_{p_j}$. Так как $|G_{p_i} G_{p_j}| < |G|$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $G_{p_i} G_{p_j} \in \mathfrak{F}$. Так как формация \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 , то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

3. Пусть $n = 2$. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2}$ представима в виде $G = N \rtimes M$, где M – максимальная подгруппа G . Возможны два случая:

а) $p_1, p_2 \in \pi(M)$ и N – p_1 -группа. Тогда $M = M_{p_1} M_{p_2}$, где M_{p_i} – силовские p_i -подгруппы группы M для $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, $G = N M_{p_1} M_{p_2}$. Так как \mathfrak{F} является насыщенной формацией, то $N M_{p_1} \in \mathfrak{F}$. Так как порядок $|N M_{p_2}| < |G|$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $N M_{p_2} \in \mathfrak{F}$. Аналогично, $M_{p_1} M_{p_2} \in \mathfrak{F}$. Так как формация \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 , то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

б) $p_1 \notin \pi(M)$ и $p_2 \in \pi(M)$ и N – силовская p_1 -группа. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2} = N M = F(G) M$. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация и $G_{p_2} \mathfrak{F}$ -сп G , то по теореме 15.10 [3] следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Итак, $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = w\mathfrak{F}$. \square

Обратное утверждение неверно. В качестве примера можем взять формацию $\mathfrak{F} = w\mathcal{U}$ всех расширенно сверхразрешимых групп, свойства которой хорошо изучены в работе [12]. Формация $\mathfrak{F} = w\mathcal{U}$ не является формацией Фиттинга, поэтому ввиду леммы 2.2 не обладает свойством \mathcal{P}_2 . С другой стороны, ввиду утверждения 3) леммы 1.2 из [7] выполняется

$$w\mathfrak{F} = w(w\mathcal{U}) = \mathfrak{F}.$$

Напомним [5], что формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию Кегеля, если \mathfrak{F} содержит всякую группу $G = AB = BC = AC$, где подгруппы A, B и C принадлежат \mathfrak{F} . Условию Кегеля удовлетворяют, например, формации всех нильпотентных групп [9], всех разрешимых групп [11]. Разрешимые насыщенные формации с условием Кегеля изучались в работах [5], [13]–[15].

Отметим необходимые для доказательства основной нашей теоремы результаты.

Лемма 2.4 [2, лемма 2.2]. Пусть \mathfrak{V} и \mathfrak{X} – классы групп и \mathfrak{X} обладает следующим свойством: как только \mathfrak{V} -группа G имеет \mathfrak{X} -подгруппы A, B и C , такие что $G = AB = AC = BC$, то G является \mathfrak{X} -группой. Тогда \mathfrak{X} удовлетворяет \mathcal{P}_2 для \mathfrak{V} -групп.

Теорема 2.5 [5, лемма 2.2]. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда \mathfrak{F} в том и только том случае удовлетворяет условию Кегеля, когда \mathfrak{F} имеет такой полный локальный экран f , что при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$.

Докажем основной результат работы.

Теорема 2.6. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию Кегеля.
- (2) Формация \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 .
- (3) \mathfrak{F} является формацией Фиттинга и $\mathfrak{F} = w\mathfrak{F}$.
- (4) Формация \mathfrak{F} имеет максимальный разрешимый наследственный локальный экран f такой, что

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Доказательство. Импликация из (1) \Rightarrow (2) получается из леммы 2.4.

Установим (2) \Rightarrow (3). Пусть разрешимая наследственная насыщенная формация \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 . Тогда по лемме 2.2 \mathfrak{F} является формацией Фиттинга. Применяя лемму 2.3 получаем, что $\mathfrak{F} = w\mathfrak{F}$.

Докажем, что из (3) следует (4). Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . По лемме 1.2 формация \mathfrak{F} обладает единственным разрешимым максимальным наследственным локальным экраном f , который является полным и

$$\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}.$$

Рассмотрим локальный экран g такой, что $g(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $g(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $f(p) = g(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Ясно, что $f(p) \subseteq g(p)$ для любого p . Допустим, что класс $g(p) \setminus f(p)$ непуст для некоторого простого p . Выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $f(p)$ и $g(p)$ – наследственные формации, то

$$G \in \mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}.$$

Из полноты экрана f и выбора G следует, что $O_p(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Тогда существует точный неприводимый G -модуль U над полем F_p , где F_p – поле из p элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $R = U \rtimes G$. Ясно, что U является единственной минимальной нормальной подгруппой группы R , причем $U = F_p(R)$.

Установим, что R является минимальной не \mathfrak{F} -группой. Так как

$$G \in \mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F},$$

то $G \in \mathfrak{F}$. Из $G \in \mathcal{M}(f(p))$ и свойств подгруппы U следует, что $G^{\mathfrak{S}} = U$. Пусть H – произвольная максимальная подгруппа группы R , не сопряженная с подгруппой G . Тогда $U \subseteq H$. Из $\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p))$ и $R/U \cong G \in \mathcal{M}(f(p))$ вытекает, что $H/U \in h(p)$. Так как $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ и $h(p) \subseteq \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$. Отсюда из наследственности формации \mathfrak{F} следует, что любая собственная подгруппа из R принадлежит \mathfrak{F} . Следовательно, R является минимальной не \mathfrak{F} -группой.

Используя свойства формации \mathfrak{F} из пункта 2) нашей теоремы уточним строение группы $R = U \rtimes G$. Покажем, что подгруппа G является q -подгруппой для некоторого простого q отличного от p . Допустим противное. Пусть S – силовская подгруппа группы R . Тогда подгруппа US является собственной подгруппой R . Так как $U = G^{\mathfrak{S}}$, то из (2) по лемме 1.3 следует, US является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в R . Из $US \in \mathfrak{F}$ и наследственности формации \mathfrak{F} следует, что подгруппа U \mathfrak{F} -субнормальна в US . Теперь из (4) леммы 1.3 следует, U является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G . Отсюда и из

$\pi(R) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что $R \in w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Будем считать, что G – q -подгруппа для некоторого простого q отличного от p . Покажем, что G является циклической q -группой. Допустим противное. Тогда в G найдутся, по крайней мере, две различные максимальные подгруппы S_1 и S_2 . Рассмотрим подгруппы $T_1 = US_1$ и $T_2 = US_2$. Ясно, что T_1 и T_2 – нормальные \mathfrak{F} -подгруппы в R и $R = T_1 T_2$. Так как по условию \mathfrak{F} является формацией Фиттинга, то получаем, что $R \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с $R \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Пусть G – циклическая q -группа и $|G| = q^n$. Предположим, что $n > 1$. Пусть Q и Z – циклические группы, причем $|Q| = q^{n-1}$ и $|Z| = q$. Рассмотрим регулярное сплетение $F = Q \wr Z$. Тогда $F = Q \wr Z = W \rtimes Z$, где W – база сплетения $F = Q \wr Z$. По известной теореме Калужнина – Краснера группа G вкладывается в качестве подгруппы в $F = Q \wr Z$. Так как $f(p)$ – наследственная формация и G не принадлежит $f(p)$, то $F = Q \wr Z$ также не принадлежит $f(p)$. При этом отметим, что Q и Z принадлежат формации $f(p)$. Возьмем еще одно регулярное сплетение $E = P \wr F$, где $|P| = p$. Тогда $E = P \wr F = V \rtimes F$, где V – база данного сплетения.

Рассмотрим группу $E = P \wr F = V \rtimes (W \rtimes Z)$. Так как Q и Z принадлежат формации $f(p)$, то подгруппы $R_1 = V \rtimes W$ и $R_2 = V \rtimes Z$ принадлежат формации \mathfrak{F} . Заметим, что R_1 и R_2 – субнормальные подгруппы в E и $E = R_1 R_2$. По условию \mathfrak{F} является формацией Фиттинга. Поэтому E принадлежит \mathfrak{F} . Получили противоречие.

Остается принять, что G – циклическая группа простого порядка q . Вспомним, что $G \in g(p) \setminus f(p)$. Так как $f(p), g(p)$ – наследственные формации и $\pi(f(p)) = \pi(g(p))$, то $G \in f(p)$. Получили окончательное противоречие. Следовательно, $f(p) = g(p)$ и импликация (3) \Rightarrow (4) доказана.

Установим (4) \Rightarrow (1). Пусть формация \mathfrak{F} имеет разрешимый максимальный наследственный локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$. Тогда по теореме 2.5 получаем, что формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию Кегеля. \square

3 Заключительные замечания, дальнейшего направления исследований

Приведем обзор некоторых следствий из теоремы 2.6. Изучаемые нами разрешимые фор-

мации со свойством \mathcal{P}_2 тесно связаны с хорошо известными формациями с условием Шеметкова.

Напомним (см., [5] или [1, с. 268]), формация \mathfrak{F} называется формацией с условием Шеметкова (кратко, \check{S} -формацией), если всякая ее минимальная не \mathfrak{F} -группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Начало изучения таких формаций восходит к работе [16] В.Н. Семенчука и А.Ф. Васильева, в которой ими в классе \mathfrak{S} было получено конструктивное описание всех наследственных насыщенных \check{S} -формаций. В работе [17] А.Н. Скиба показал, что всякая разрешимая наследственная \check{S} -формация является насыщенной.

Следствие 3.1. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная \check{S} -формация. Тогда \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 . Обратное утверждение неверно.

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная \check{S} -формация. Из отмеченного выше результата А.Н. Скибы следует, что \mathfrak{F} – насыщенная формация. Ввиду теоремы 3 из [16] (см., также [4, теорема 6.4.11]) \mathfrak{F} имеет такой полный локальный экран f , что при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Теперь результат следует из теоремы 2.6. Нетрудно проверить, что разрешимая наследственная формация \mathfrak{A} всех абелевых групп обладает свойством \mathcal{P}_2 , но она, очевидно, не является \check{S} -формацией. Имеются также примеры разрешимых наследственных насыщенных не \check{S} -формаций со свойством \mathcal{P}_2 . Их нетрудно построить, используя результаты работы [18]. \square

В качестве следствий из теоремы мы можем получить не только отмеченные выше известные результаты В. Хупперта и О. Кегеля, но и новые. Приведем некоторые из них.

Напомним, что \mathfrak{F} называется решеточной формацией (см., например, [1, с. 248]), если множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой группе.

Следствие 3.3. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная решеточная формация. Тогда \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 .

В работе [19] В.С. Монахов ввел и изучил классы групп \mathfrak{R} и \mathfrak{D} с ограничениями на подгруппы Шмидта групп из этих классов. Класс \mathfrak{R} содержит только те группы, у которых любая подгруппа Шмидта сверхразрешима. Класс состоит из всех групп с несверхразрешимыми подгруппами Шмидта. В работе доказано, что \mathfrak{R} и \mathfrak{D} являются разрешимыми наследственными

формациями Фиттинга. В работе [20] доказано, что \mathfrak{R} и \mathfrak{D} являются формациями с условием Кегеля.

Следствие 3.3. Пусть группа $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если в каждом произведении $A_i A_j$ любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то и в G любая подгруппа Шмидта сверхразрешима.

(2) Если каждая подгруппа $A_i A_j$ сверхразрешима, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима.

(3) Если в каждом произведении $A_i A_j$ любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна, то и в группе G любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна.

Таким образом, в настоящей работе получено конструктивное решение отмеченной во введении проблемы. В дальнейшем нами планируется изучить разрешимые формации со свойством \mathcal{P}_2 в общем случае, с ослабленными свойствами наследственности или насыщенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ballester-Bolinches A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.
2. Амберг, Б. Конечные группы с кратными факторизациями / Б. Амберг, Л.С. Казарин, Б. Хефлинг // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 1251–1263.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
5. Васильев, А.Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // *Вопросы алгебры*. – 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.
6. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // *Вопросы алгебры*. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
7. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.
8. Васильев, А.Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // *Сиб. мат. журнал*. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

9. Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. – 1965. – Vol. 87, № 1. – S. 42–48.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen. I / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 794 s.
11. Казарин, Л.С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журнал. – 1991. – Т. 34, № 7–8. – С. 947–950.
12. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
13. Васильев, А.Ф. О перечислении локальных формаций с условием Кегеля / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 7. – С. 86–93.
14. Ballester-Bolinches, A. Finite trifactorized groups and formations / A. Ballester-Bolinches, A. Martinez-Pastor, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 2000. – Vol. 226, № 2. – P. 990–1000.
15. Ballester-Bolinches, A. On formations with the Kegel property / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // J. Group Theory. – 2005. – № 8. – P. 605–611.
16. Семенчук, В.Н. Характеризация локальных формаций \mathfrak{F} по заданным свойствам минимальных не \mathfrak{F} -групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 175–181.
17. Скиба, А.Н. Об одном классе локальных формаций конечных групп / А.Н. Скиба // Докл. Акад. наук БССР. – 1990. – Т. 34, № 11. – С. 382–385.
18. Murashka, V.I. Soluble formations with the Shemetkov property / V.I. Murashka // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 82–87.
19. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Математические заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.
20. Васильев, А.Ф. Арифметические графы и классы групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сиб. мат. журнал. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 55–73.

Поступила в редакцию 08.10.19.