МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О СИЛОВСКОЙ БАШНЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С СУБНОРМАЛЬНЫМИ НЕЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.С. Монахов[1], **А.А. Трофимук**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*
[2]*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест*

ON SYLOW TOWER OF FINITE GROUP WITH SUBNORMAL NON-CYCLIC PRIMARY SUBGROUPS

V.S. Monakhov[1], **A.A. Trofimuk**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*
[2]*A.S. Pushkin Brest State University, Brest*

Пусть в конечной группе G субнормальны все нециклические максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы. Предположим, что силовская 2-подгруппа группы G циклическая или самонормализуема. При этих предположениях доказывается, что группа G обладает силовской башней.

Ключевые слова*: конечная группа, силовская подгруппа, максимальная подгруппа, циклическая подгруппа, субнормальная подгруппа, нормализатор.*

Let G be a finite group such that every non-cyclic maximal subgroups in its Sylow subgroups are subnormal in G. Suppose that a Sylow 2-subgroup of G is either cyclic or self-normalizing. Under these assumptions, we prove that G has a Sylow tower.

Keywords*: finite group, Sylow subgroup, maximal subgroup, cyclic subgroup, subnormal subgroup, normalizer.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В отношении обозначений и терминологии будем придерживаться [1], [2].

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq ... \subseteq G_m = G,$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех $i = 0,1,...,m.$ Фактор-группы G_{i+1} / G_i называются факторами этого ряда.

Говорят, что группа G имеет силовскую башню, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Если

$$\pi(G) = \{p_1, p_2,..., p_n\}, p_1 > p_2 ... > p_m,$$

и для каждого i фактор G_i / G_{i-1} изоморфен силовской p_i-подгруппе группы G, то говорят, что группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Сверхразрешимой называют группу, у которой существует нормальный ряд с циклическими факторами. Каждая сверхразрешимая группа обладает силовской башней сверхразрешимого типа [1, 4.51], [2, VI.9.1]. Знакопеременная группа A_4 степени 4 имеет силовскую башню несверхразрешимого типа.

Согласно теореме Цассенхауза [2, IV.2.11] группа с циклическими силовскими подгруппами содержит нормальную циклическую холлову подгруппу, фактор-группа по которой также циклическая, а значит группа сверхразрешима и обладает силовской башней сверхразрешимого типа. Ли, Ши и Занг [3] установили сверхразрешимость группы, у которой каждая собственная подгруппа либо циклическая, либо самонормализуема. Обобщая этот результат Занг [4, теорема 1.2] получил разрешимость группы, в которой каждая разрешимая подгруппа либо циклическая, либо нормальна, либо самонормализуема.

Развивая данную тематику мы доказываем следующую теорему.

***Теорема* 0.1.** *Пусть в группе G субнормальны все нециклические максимальные подгруппы из каждой силовской подгруппы. Если силовская 2-подгруппа группы G циклическая или самонормализуема, то G имеет силовскую башню.*

Пример. Условие цикличности или самонормализуемости силовской 2-подгруппы в теореме опустить нельзя. Примером служит знакопеременная группа степени 5, у которой все максимальные подгруппы в силовских подгруппах циклические.

***Следствие* 0.1.** *Пусть в группе G каждая примарная подгруппа либо циклическая, либо нормальна, либо самонормализуема. Тогда G обладает силовской башней и ее главный ранг $\leq 2.$ В частности, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G / \Phi(G)$ не превышает 5.*

Результат Занга [4] существенно улучшается этим следствием.

Приведем еще два следствия, которые непосредственно вытекают из доказанной теоремы.

***Следствие* 0.2.** *Если в группе G нечетного порядка субнормальны все нециклические максимальные подгруппы из силовских подгрупп, то G обладает силовской башней.*

***Следствие* 0.3.** *Если в группе G каждая примарная подгруппа либо циклическая, либо субнормальна, либо самонормализуема, то G обладает силовской башней.*

1 Вспомогательные леммы

Символом $\pi(G)$ обозначается множество простых чисел, делящих порядок группы G. Центр, коммутант и подгруппа Фраттини группы G обозначаются через $Z(G)$, G' и $\Phi(G)$ соответственно, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G, а $O(G)$ – наибольшая нормальная подгруппа нечетного порядка группы G. Если P – p-группа, то

$$\Omega_1(P) = \langle x \in P \mid x^p = 1 \rangle.$$

Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

***Лемма* 1.1.** *Если в нециклической p-группе G все собственные подгруппы циклические, то либо G – элементарная абелева группа порядка p^2, либо группа кватернионов порядка* 8.

Доказательство. Пусть $x \in Z(G)$, $|x| = p$. Если существует подгруппа $\langle y \rangle$ порядка p, отличная от $\langle x \rangle$, то $\langle x \rangle \langle y \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ – нециклическая подгруппа порядка p^2 и $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ элементарная абелева. Если в группе G подгруппа порядка p единственна, то согласно [2, III.8.2] группа G является группой кватернионов порядка 2^n, $n \geq 3$. С другой стороны, в группе G все подгруппы нормальны. Теперь по [2, III.7.12] группа G имеет порядок 8.

***Лемма* 1.2** [5, теорема 1.2]. *Пусть G неабелева p-группа порядка p^{n+1} с циклической подгруппой $A = \langle a \rangle$ индекса p. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

1) $M_{p^{n+1}} = \langle a, b \mid a^{p^n} = b^p = 1, a^b = a^{1+p^{n-1}} \rangle$,

где $n \geq 3$ *при* $p = 2$. *В этом случае,* $|G'| = p$, $Z(G) = \Phi(G)$, $|\Omega_1(G)| = p^2$.

2) $p = 2$, $D_{2^{n+1}} = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ – *диэдральная группа. Все элементы разности $G \setminus \langle a \rangle$ являются инволюциями.*

3) $p = 2$,

$$Q_{2^{n+1}} = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, a^b = a^{-1} \rangle$$ –

обобщенная группа кватернионов. Группа G содержит только одну инволюцию, все элементы разности $G \setminus \langle a \rangle$ имеют порядок 4, $G / Z(G)$ – *диэдральная группа при* $n > 2$.

4) $p = 2$,

$$SD_{2^{n+1}} = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, bab = a^{-1+2^{n-1}} \rangle,$$

$n > 2$ – *полудиэдральная группа. В этом случае максимальные подгруппы* $\Omega_1(G) = \langle a^2, b \rangle \simeq D_{2^n}$ *и* $\langle a^2, ab \rangle \simeq Q_{2^n}$ *характеристичны в* G, $G / Z(G)$ – *диэдральная группа.*

В случае (2)–(4) *верно* $|G : G'| = 4$, $|Z(G)| = 2$.

В дальнейшем мы сохраним обозначения за группами $M_{p^{n+1}}$, $D_{2^{n+1}}$, $Q_{2^{n+1}}$ и $SD_{2^{n+1}}$ из леммы 1.2. Через E_{p^n} будем обозначать элементарную абелеву группу порядка p^n.

***Лемма* 1.3.** *Если в группе G силовская 2-подгруппа является группой кватернионов порядка 8 и совпадает со своим нормализатором, то группа G 2-нильпотентна.*

Доказательство. Если $O(G) \neq 1$, то по индукции $G / O(G)$ 2-нильпотентна, поэтому и группа G 2-нильпотентна. Пусть $O(G) = 1$. По [6, теорема 2] центр группы имеет четный порядок. Пусть i инволюция из $Z(G)$ и $N = \langle i \rangle$. В фактор-группе G / N силовская 2-подгруппа абелева порядка 4 и совпадает со своим нормализатором. По [2, IV.2.6] фактор-группа G / N 2-нильпотентна, т. е. существует нормальная подгруппа H / N такая, что $|G : H| = 4$, а $|H : N|$ – нечетное число. По теореме Шура – Цассенхауза $H = H_1[N]$, а так как $|H : H_1| = 2$, то H_1 нормальна в H. Теперь H_1 нормальна в G и $|G : H_1| = 8$. Лемма доказана.

Через $r(G)$ обозначается главный ранг разрешимой группы G [2, глава VI.8]. Определения и свойства p-длины, нильпотентной и производной длин разрешимой группы G приведены в [1, глава 4], [2, глава VI].

***Лемма* 1.4.** ([7]) *Пусть G – разрешимая группа и $r(G) \leq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает* 4.

2. *Производная длина фактор-группы $G / \Phi(G)$ не превышает* 5.

3. $l_p(G) \leq 1$ *для любого простого* $p > 3$, *а* $l_2(G) \leq 2$ *и* $l_3(G) \leq 2$.

2 *Доказательство теоремы* 0.1

Проверим, что условия теоремы распространяются на все подгруппы группы G. Пусть H – подгруппа группы G и R_1 – силовская подгруппа из H, а R – силовская подгруппа из G, содержащая R_1. Если $R = R_1$, то в H субнормальны все нециклические максимальные подгруппы из R_1. Пусть $R \neq R_1$ и A – максимальная подгруппа из R, содержащая R_1. По условию подгруппа A либо циклическая, либо субнормальна в группе G. Если A циклическая, то R_1 циклическая. Если A субнормальна в группе G, то R_1 субнормальна в группе G, поэтому R_1 субнормальна в H. Пусть P_1 – силовская 2-подгруппа из H, а P – силовская 2-подгруппа из G, содержащая P_1. По условию подгруппа P циклическая или самонормализуема. Если $P = P_1$, то в H силовская 2-подгруппа самонормализуема. Если P циклическая, то и P_1 циклическия. Итак, условия теоремы распространяются на все подгруппы группы G.

Проверим, что условия теоремы наследуют все фактор-группы. Пусть P – силовская p-подгруппа группы G и M/N – произвольная максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы PN/N группы G/N. Тогда

$$|PN/N : M/N| = |PN : M| = p.$$

Если M_p – силовская p-подгруппа из M, то $|P : M_p| = p$, а, значит, M_p – максимальная подгруппа в P. По условию M_p либо циклическая, либо субнормальна в G. Если M_p циклическая, то $M/N = M_pN/N \simeq M_p/M_p \cap N$ также циклическая. Если M_p субнормальна в G, то $M/N = M_pN/N$ субнормальна в G/N. Пусть G_2 – силовская 2-подгруппа из G и $\overline{G_2} = G_2N/N$ – силовская 2-подгруппа группы G/N. Если G_2 – циклическая, то $\overline{G_2}$ – циклическая. Если G_2 субнормальна в G, то и $\overline{G_2}$ – субнормальна в G/N.

Итак, каждая подгруппа и каждая фактор-группа группы G удовлетворяют условию теоремы.

Пусть R – силовская r-подгруппа группы G. Если R нормальна в G, то по индукции фактор-группа G/R обладает силовской башней, поэтому группа G также обладает силовской башней. Если в G существует нормальная подгруппа H такая, что $G = R[H]$, то по индукции H обладает силовской башней, значит и G обладает силовской башней. Поэтому можно утверждать, что

(1) для каждого $r \in \pi(G)$ группа G не является r-замкнутой и не является r-нильпотентной.

Пусть P – силовская p-подгруппа группы G, $p \in \pi(G)$, p – наименьшее. Ввиду (1) и [2, IV.2.8] можно утверждать, что подгруппа P нециклическая.

Если в подгруппе P все собственные подгруппы циклические, то по лемме 1.1 подгруппа P либо элементарная абелева порядка p^2, либо группа кватернионов порядка 8. Предположим, что $p > 2$. В этом случае порядок группы G нечетен и взаимно прост с $p^2 - 1$. Действительно, если q делит $|G|$ и q делит $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, то $q > p$ и q делит $p+1$. Но это возможно лишь в случае, когда $p = 2$ и $q = 3$, противоречие. Итак, силовская p-подгруппа для наименьшего $p \in \pi(G)$ при $p > 2$ элементарная абелева порядка p^2 и порядок группы G взаимно прост с $p^2 - 1$. По [2, IV.5.10] группа G p-нильпотентна, что противоречит (1). При $p = 2$ подгруппа P по условию теоремы либо циклическая, либо самонормализуема. Так как P нециклическая, то P самонормализуема, и либо элементарная абелева порядка 4, либо группа кватернионов порядка 8. Теперь группа G 2-нильпотентна либо [2, IV.2.6], либо по лемме 1.3. Опять получили противоречие с (1). Случай, когда в подгруппе P все собственные подгруппы циклические, рассмотрен.

Предположим, что в подгруппе P имеются две нециклические максимальные подгруппы P_1 и P_2. По условию теоремы они субнормальны в G. Поэтому подгруппа $P = P_1P_2$ нормальна в G. А это противоречит (1).

Остался случай, когда в подгруппе P имеется точно одна нециклическая максимальная подгруппа. Пусть $|P| = p^{n+1}$ и H – нециклическая максимальная подгруппа порядка p^n. Тогда $n \geq 2$ и по [2, III.8.3] в группе P имеется другая максимальная подгруппа A, которая по условию должна быть циклической. Пусть $A = \langle a \rangle$ и $b \in P \setminus A$. Тогда $P = \langle a \rangle \langle b \rangle$ и $|P/\Phi(P)| = p^2$ по [2, III.3.15]. Поэтому в группе P число максимальных подгрупп равно $1 + p$.

Если P абелева, то $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ для некоторого $b \in P \setminus A$ и $|a| > p$ поскольку $n \geq 2$. Теперь группа G p-нильпотентна по [2, IV.2.7]. А это противоречит (1).

Пусть P неабелева и $p > 2$. По лемме 1.2 группа P изоморфна группе $M_{p^{n+1}}$ и группа G

p-нильпотентна по [2, IV.3.7]. Опять имеем противоречие с (1).

Пусть P неабелева и $p=2$. По лемме 1.2 существуют четыре неабелевых 2-группы с циклической максимальной подгруппой: $M_{2^{n+1}}$, $D_{2^{n+1}}$, $Q_{2^{n+1}}$ и $SD_{2^{n+1}}$.

Если $P=M_{2^{n+1}}$, то группа 2-нильпотентна по [2, IV.3.7].

В диэдральной группе $D_{2^{n+1}}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы $[\langle a^2\rangle]\langle b\rangle$ и $[\langle a^2\rangle]\langle ab\rangle$, поэтому группа $D_{2^{n+1}}$ не удовлетворяет условию рассматриваемого случая.

При $n\geq 3$ в обобщенной группе кватернионов $Q_{2^{n+1}}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы $\langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$. Поэтому группа $Q_{2^{n+1}}$ при $n\geq 3$ не удовлетворяет условию. В группе кватернионов Q_8 порядка 8 все три максимальные подгруппы циклические. Но в этом случае по условию теоремы подгруппа Q_8 самонормализуема и группа G 2-нильпотентна по лемме 1.3.

В полудиэдральной группе $SD_{2^{n+1}}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы D_{2^n} и Q_{2^n} и одна циклическая. Поэтому SD_{2^n} тоже исключается. Теорема доказана.

Доказательство следствия 0.1. По теореме группа G обладает силовской башней, а, значит, разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа. Тогда $|N|=p^n$ для некоторого простого p и некоторого натурального n. Предположим, что $n\geq 3$ и пусть N_1 – максимальная подгруппа из N. Тогда N_1 – p-подгруппа порядка $p^{n-1}\geq p^2$. Значит, N_1 нециклическая. Так как $N\leq N_G(N_1)$, то N_1 не самонормализуема. По условию подгруппа N_1 должна быть нормальной в G, противоречие. Значит, $n\leq 2$.

Несложно проверить, что условия доказываемого следствия наследует фактор-группа G/N. По индукции $r(G/N)\leq 2$, значит, $r(G)\leq 2$. Остальные оценки вытекают из леммы 1.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006.

2. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B.Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.

3. *Li*, *S.* Study on abelian subgroups and the structure of groups / S. Li, J. Shi, C. Zhang // Mathematics in Practice and Theory. – 2008. – № 19. – P. 125–131.

4. *Zhang*, *S.* On Finite Groups in which Every Solvable Non-cyclic Proper Subgroup is either Self-normalazing or Normal / S. Zhang // International Journal of Algebra. – 2012. – Vol. 6, № 23. – P. 1111–1115.

5. *Berkovich*, *Y.* Groups of Prime Power Order / Y. Berkovich. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2008.

6. *Brauer*, *R.* On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a generalized quaternion group / R. Brauer, M. Suzuki // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1960. – № 45. – P. 1757–1759.

7. *Монахов*, *В.С.* О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – № 5. – С. 1123–1137.

Поступила в редакцию 15.08.13.